β) Είναι $f(x)=e^x$, $f\,'(x)=(e^x)'=e^x$, $f(x_o)=e^{x_o}$, $f\,'(x_o)=e^{x_o}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M\left(x_o, f(x_o)\right)$ είναι

$$y-f(x_o)=f\,'(x_o)(x-x_o) \Leftrightarrow y-e^{x_o}=e^{x_o}\left(x-x_o\right) \Leftrightarrow y=e^{x_o}\cdot x+e^{x_o}(1-x_o)$$

Για να διέρχεται η ευθεία (ε) από το σημείο (-1,-e) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$-e=e^{x_o}\cdot(-1)+e^{x_o}\left(1-x_o\right) \Leftrightarrow -e=-e^{x_o}+e^{x_o}-x_oe^{x_o} \Leftrightarrow x_oe^{x_o}=e \Leftrightarrow x_o=e^{1-x_o}$$

$$\Leftrightarrow x_o-e^{1-x_o}=0 \Leftrightarrow g(x_o)=g(1),\ \text{όπου}\ g(x)=x-e^{1-x}, x\in IR$$

Είναι $g'(x)=\left(x-e^{1-x}\right)'=1-e^{1-x}\cdot\left(1-x\right)'=1+e^{1-x}>0$, για κάθε $x\in IR$,

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR .

Άρα η g , ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της , είναι συνάρτηση 1-1 .

Έτσι από την $g(x_o)=g(1)$, δεδομένου ότι η g είναι συνάρτηση 1-1 , προκύπτει ότι είναι $x_o=1$

Για $x_o=1$ η εξίσωση της (ε) γίνεται y=ex. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη της C_f είναι η ευθεία (ε):y=ex και το σημείο της επαφής είναι το M(1,e)

γ) Είναι $f\,'(x)=e^x$ και $f\,''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in IR$, οπότε η f είναι κυρτή στο IR.Επειδή η f είναι κυρτή στο IR έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη της ευθείας (ε):y=ex, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής M(1,e).

Ακόμη η ευθεία (ε):y=ex τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο O(0,0).

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=E_1+E_2$,όπου E_1είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=0 και E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες x=0 και x=1

Είναι

$$E_1 = \int_{\alpha}^{o} f(x)dx = \int_{\alpha}^{o} e^x dx = \left[e^x\right]_{\alpha}^{o} = 1 - e^{\alpha} \text{ τ.μ και}$$

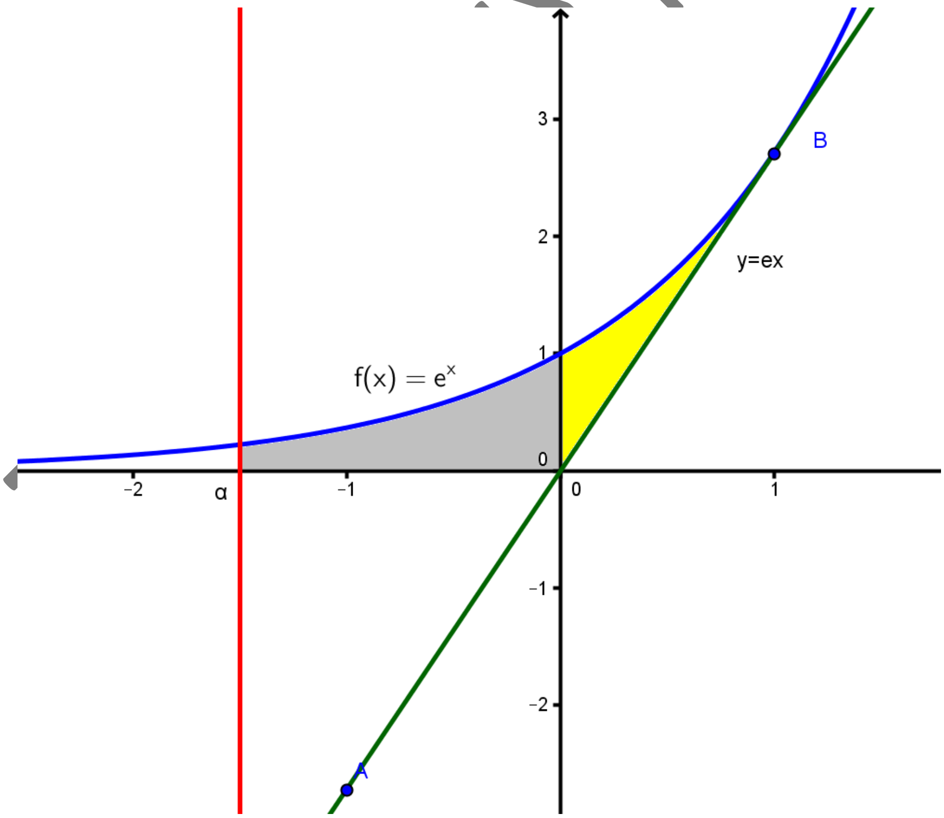
$$E_2 = \int_{o}^{1}\left(f(x) - ex\right)dx = \int_{o}^{1}\left(e^x - e\cdot x\right)dx = \int_{o}^{1} e^x dx - e\cdot\int_{o}^{1} xdx = \left[e^x\right]_{o}^{1} - \frac{e}{2}\left[x^2\right]_{o}^{1} =$$

$$= e - 1 - \frac{e}{2}(1-0) = \left(\frac{e}{2} - 1\right) \text{ τ.μ}$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\alpha) = E_1 + E_2 = 1 - e^{\alpha} + \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - e^{\alpha} \text{ τ.μ}$$

Είναι $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(\frac{e}{2} - e^{\alpha}\right) = \frac{e}{2} - 0 = \frac{e}{2}$ (τ.μ)



ΘΕΜΑ 2.

Για την συνάρτηση $f : IR \to IR$ ισχύει

$\left|f(x) - f(y) - x^2 + y^2\right| \le (\eta\mu x - \eta\mu y)^2$ για κάθε $x, y \in R$ και $f(0) = 1$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2, x\in IR$ είναι σταθερή στο IR και να βρεθεί ο τύπος της f.
2. Να βρείτε ποιο σημείο της C_f απέχει από το σημείο A(5,0) την μικρότερη απόσταση .
3. Αν M_o είναι το σημείο της C_f που απέχει από το A(5,0) την μικρότερη απόσταση .

   α) να δείξετε ότι η εφαπτόμενη (ε) της Cf στο M_o είναι κάθετη στην ευθεία AM_o .

   β) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x , την ευθεία AM_o και την ευθεία x=0.

ΛΥΣΗ

1) Έστω $x_o\in IR$ τυχαίος. Λόγω της (1) έχουμε ότι για κάθε $x\neq x_o$

ισχύει :

$$\left|f(x) - f(x_o) - x^2 + x_o^2\right| \le (\eta\mu x - \eta\mu x_o)^2 \Leftrightarrow \left|\left(f(x) - x^2\right) - \left(f(x_o) - x_o^2\right)\right| \le (\eta\mu x - \eta\mu x_o)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|g(x) - g(x_o)\right| \le (\eta\mu x - \eta\mu x_o)^2 \Leftrightarrow \frac{\left|g(x) - g(x_o)\right|}{|x - x_o|} \le \frac{(\eta\mu x - \eta\mu x_o)^2}{|x - x_o|}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}\right| \le \left|\frac{(\eta\mu x - \eta\mu x_o)^2}{x - x_o}\right|$$

$$\Leftrightarrow -\left|\frac{(\eta\mu x - \eta\mu x_o)^2}{x - x_o}\right| \le \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \le \left|\frac{(\eta\mu x - \eta\mu x_o)^2}{x - x_o}\right| : (2)$$

Η συνάρτηση φ(x)=ημx είναι παραγωγίσιμη στο IR με φ΄(x)=(ημx)΄=συνx ,

οπότε είναι :

$$\lim_{x\to x_o}\left|\frac{(\eta\mu x-\eta\mu x_o)^2}{x-x_o}\right| = \left|\lim_{x\to x_o}\left[\left(\frac{\eta\mu x-\eta\mu x_o}{x-x_o}\right)^2\cdot(x-x_o)\right]\right|$$

$$=\left|\lim_{x\to x_o}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_o)}{x-x_o}\right)^2\cdot\lim_{x\to x_o}(x-x_o)\right| = \left|\left(\varphi'(x_o)\right)\cdot 0\right| = |0| = 0$$

και $\lim\limits_{x\to x_o}\left(-\left|\dfrac{(\eta\mu x-\eta\mu x_o)^2}{x-x_o}\right|\right) = -0 = 0$, οπότε λόγω της (2) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} = 0$$

Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o\in$IR και ισχύει $g'(x_o)=0$ για κάθε $x_o\in$IR.

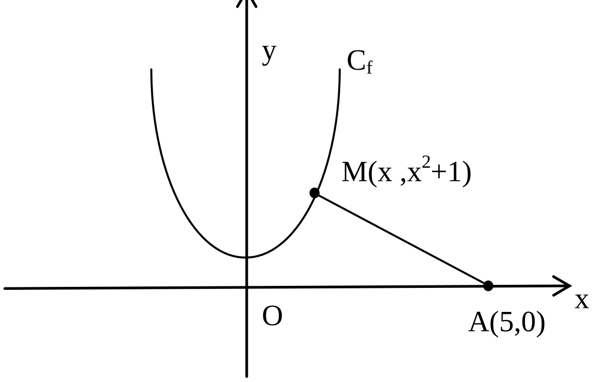
Άρα η g είναι σταθερή στο IR .Επειδή η g είναι σταθερή στο IR έχουμε ότι για κάθε x∈IR , ισχύει:

$g(x) = g(0) \Leftrightarrow f(x) - x^2 = f(0) - 0^2 \Leftrightarrow f(x) - x^2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 1$ (ικανοποιεί την υπόθεση)

2) Έστω $M\left(x, x^2+1\right)$ σημείο της C_f.Είναι

$$(AM) = \sqrt{(x-5)^2 + \left(x^2+1-0\right)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + \left(x^2+1\right)^2}$$

Είναι φανερό ότι η απόσταση (AM) γίνεται ελάχιστη αν και μόνο αν το $(AM)^2$ γίνεται ελάχιστο.



Είναι $(AM)^2=(x-5)^2+(x^2+1)^2=x^4+3x^2-10x+26=h(x)$, $x\in R$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=4x^3+6x-10$.

Είναι $h''(x)=12x^2+6>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η h΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Ακόμη είναι $h'(1)=4\cdot 1^3+6\cdot 1-10=0$. Έτσι έχουμε

$h'(x)>0 \Leftrightarrow h'(x)>h'(1) \Leftrightarrow x>1$, (αφού η h΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R).

Όμοια $h'(x)<0 \Leftrightarrow h'(x)<h'(1) \Leftrightarrow x<1$,(αφού η h΄ είναι γν. αύξουσα στο R.)

$h'(x)=0 \Leftrightarrow h'(x)=h'(1) \Leftrightarrow x=1$, (αφού η h΄ ως γνησίως αύξουσα στο R είναι συνάρτηση "1-1").

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘		↗
		min	

Από το πρόσημο της $h'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$, το οποίο είναι το

$h_{min}=h(1)=20$. Για x=1 είναι $y=f(1)=1^2+1=2$.

Επομένως το σημείο της C_f που απέχει από το Α(5,0) την μικρότερη

απόσταση είναι το $M_o(1,2)$ και η απόστασή του από το Α είναι

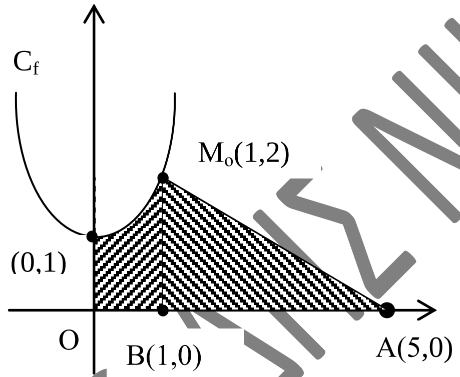
$(AM_o)=(AM)_{min}=\sqrt{h_{min}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

3) α) είναι: $f'(x)=\left(x^2+1\right)'=2x,\ x\in IR$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M_o(1,2)$ είναι $\lambda_\varepsilon=f'(1)=2$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AM_o είναι $\lambda_{AM_o}=\dfrac{y_{M_o}-y_A}{x_{M_o}-x_A}=\dfrac{2-0}{1-5}=-\dfrac{1}{2}$

Είναι $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{AM_o}=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ οπότε η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ευθεία AM_o

β)



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=E_1+E_2$, όπου E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ και E_2 είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABM_o.

Είναι $E_1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\dfrac{4}{3}-0=\dfrac{4}{3}$ τ.μ

και $E_2=\dfrac{1}{2}(AB)\cdot(BM_o)=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$ τ.μ Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$E=E_1+E_2=\dfrac{4}{3}+4=\dfrac{16}{3}$ τ.μ

ΘΕΜΑ 3.

Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR \to IR$ ισχύει $x \cdot f''(x) = (x-2) \cdot f'(x) + f(x)$ για κάθε $x \in IR$ και είναι $f'(1) = 1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 1 & , \ x = 0 \end{cases}$

β) Να βρεθεί η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

γ) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία , τα τοπικά ακρότατα ,

την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

δ) Αν $0<\alpha<\beta<1$ να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta \dfrac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} dx > \ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in IR$ έχουμε:

$$xf''(x) = (x-2)f'(x) + f(x) \Leftrightarrow x \cdot f''(x) + f'(x) = (x-1)f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f'(x))' \cdot x + f'(x) \cdot (x)' = f'(x) \cdot (x-1) + f(x)(x-1)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xf'(x))' = ((x-1)f(x))' \Leftrightarrow xf'(x) = (x-1)f(x) + c_1 \quad (c_1 \in IR \text{ σταθερά})$$

Για $x = 1$ έχουμε

$$1 \cdot f'(1) = (1-1) \cdot f(1) + c_1 \Leftrightarrow c_1 = f'(1) = 1$$

Ετσι για κάθε $x \in IR$ έχουμε :

$$xf'(x) = (x-1)f(x) + 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = xf(x) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xf(x)+1)' = xf(x) + 1 \Leftrightarrow xf(x) + 1 = c_2 \cdot e^x \quad (c_2 \in IR \text{ σταθερά})$$

Για $x = 0$ έχουμε: $\quad 0 \cdot f(0) + 1 = c_2 \cdot e^0 \Leftrightarrow c_2 = 1$

Ετσι για κάθε $x \in IR$ ισχύει $\quad x \cdot f(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow x \cdot f(x) = e^x - 1 \quad : (1)$

Απο την (1) έχουμε ότι για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R), έπεται ότι ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Άρα είναι:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{\left(x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

Β. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)' = \dfrac{\left(e^x - 1\right)' x - \left(e^x - 1\right)\left(x\right)'}{x^2} =$

$$= \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{\left(x - 1\right)e^x + 1}{x^2}$$

Στο $x_0 = 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1 - x\right)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{\left(2x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \in IR,$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$$\text{Έτσι έχουμε } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x - 1\right)e^x + 1}{x^2} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x \neq 0$

$$f''(x) = \left(\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}\right)' = \frac{\left((x-1)e^x+1\right)' \cdot x^2 - \left((x-1)e^x+1\right)\cdot\left(x^2\right)'}{x^4} =$$

$$= \frac{x^3 \cdot e^x - \left(2x^2-2x\right)e^x - 2x}{x^4} = \frac{\left(x^2-2x+2\right)\cdot e^x - 2}{x^3}$$

Στο $x_0 = 0$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(x-1)e^x+2-x^2}{2x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[2(x-1)e^x+2-x^2\right]'}{\left(2x^3\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^x-2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(3x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3} = \frac{1}{3} \in \mathrm{IR}$$

Άρα η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f''(0) = \frac{1}{3}$

Έτσι έχουμε $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^2-2x+2\right)e^x-2}{x^3} & ,\ \text{αν } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} & ,\ \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=(x-1)e^x+1,\ x\in R$

Είναι $g'(x)=\ldots=xe^x$ έχουμε :

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow xe^x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄(x)	-	0	+
g(x)	↘	min	↗

Από το πρόσημο της $g'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο σημείο $x_0=0$ το οποίο είναι $g_{min}=g(0)=0$.

Επομένως για κάθε $x\in IR$ ισχύει $g(x) \geq g(0) = 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0

Άρα για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x+1 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^x+1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

Ακόμη είναι $f'(0)=\frac{1}{2}>0$, έτσι για κάθε $x\in R$ είναι $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x-2,\ x\in IR$

Είναι $\varphi'(x) = \ldots = (2x-2)e^x+(x^2-2x+2)e^x = x^2\cdot e^x \geq 0$ για κάθε $x\in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο IR

Έτσι

1) για κάθε x>0 έχουμε

$$x > 0 \overset{(\varphi \uparrow R)}{\Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x - 2 > 0$$

$$\overset{(x^3>0)}{\Rightarrow} \frac{\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x - 2}{x^3} > 0 \Rightarrow f\,''(x) > 0$$

2) για κάθε x<0 έχουμε

$$x < 0 \overset{(\varphi \uparrow R)}{\Rightarrow} \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow (x^2 - 2x + 2)e^x - 2 < 0$$

$$\overset{(x^3<0)}{\Rightarrow} \frac{\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x - 2}{x^3} > 0 \Rightarrow f\,''(x) > 0$$

3) $f\,''(0) = \dfrac{1}{3} > 0$

Έτσι για κάθε $x \in IR$ισχύει $f\,''(x)>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο IR και η C_f δεν έχει σημείο καμπής

Δ) Έστω $0 < \alpha < \beta <1$.Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$έχουμε:

$$0 < x^2 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(x^2), \left(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f \uparrow IR\right) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} > \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \left(\frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} - \frac{1}{x}\right) dx > 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} dx - \int_\alpha^\beta \frac{1}{x} dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} dx > \int_\alpha^\beta \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1}\, dx > \left[\ln x\right]_\alpha^\beta = \ln\beta - \ln\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} dx > \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ΘΕΜΑ 4

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to IR$ ισχύει :

$xf(x)+x^2f'(x)=\dfrac{x+1}{1+e^{x\cdot f(x)}}$ για κάθε x>0 και f(1)=0.

1) Να δείξετε ότι:

α) $xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x$, για κάθε $x>0$.

β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$

2) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι $\ln x\le\dfrac{x}{e}$ για κάθε x>0

3) Να δείξετε ότι για κάθε α ∈(1,e) ισχύει : $e^{\int_\alpha^e \frac{1}{\ln x}dx}>\left(\dfrac{e}{\alpha}\right)^e$

4) Να βρεθούν οι α,β>0, ώστε $\alpha^\beta\cdot\beta^\alpha=e^{\frac{2\alpha\beta}{e}}$

5) Να λυθεί στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση : $2^x=x^2$

ΛΥΣΗ

1) α) Για κάθε x>0 έχουμε:

$$xf(x)+x^2f\,'(x)=\frac{x+1}{1+e^{xf(x)}}\Leftrightarrow\left(f(x)+xf\,'(x)\right)\left(1+e^{xf(x)}\right)=\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'\cdot\left(1+e^{xf(x)}\right)=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'+e^{xf(x)}\left(xf(x)\right)'=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'+\left(e^{xf(x)}\right)'=1+\frac{1}{x}\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}\left[xf(x)+e^{xf(x)}\right]'=\left(x+\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x+c\ ,\quad\left(c\in IR\text{ σταθερά}\right)$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$1\cdot f(1)+e^{1\cdot f(1)}=1+\ln 1+c\Leftrightarrow f(1)+e^{f(1)}=1+c\Leftrightarrow 0+e^0=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x \qquad :(1)$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση

$g(x)=x+e^x,\ x\in IR.$

Είναι $g'(x)=1+e^x>0$ για κάθε $x\in IR$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR .

Επομένως η g είναι συνάρτηση 1 - 1.

Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x\Leftrightarrow xf(x)+e^{xf(x)}=\ln x+e^{\ln x}\Leftrightarrow g\left(xf(x)\right)=g\left(\ln x\right)\overset{(g\ \text{"1-1"})}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow xf(x)=\ln x\ \Leftrightarrow\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

Άρα είναι $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0$. (Είναι φανερό ότι ικανοποιεί την υπόθεση)

2) Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

έχουμε :

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\ln x}{x^2}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<\ln e \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{(\ln x\uparrow\,(0,+\infty))}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} x<e \\ x>0 \end{matrix} \Leftrightarrow 0<x<e$$

Ακόμη $\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>e$ και $\begin{cases} f'(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=e$

x	0		e		+∞
f ΄(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	
			max		

Από το πρόσημο της f΄(x) που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$,

οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στο $x_0=e$, το οποίο είναι το

$\max f(x)=f(e)=\dfrac{1}{e}$.

Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο έπεται ότι για κάθε x>0 ισχύει

$f(x)\le \max f(x) \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow \ln x\le\dfrac{x}{e}$

Επομένως για κάθε x>0 ισχύει $\ln x\le\dfrac{x}{e}$: (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=e.

3) Για κάθε x>0 ισχύει $\ln x \le \frac{x}{e}$ με την ισότητα μόνο για x=e

Έτσι για κάθε $\alpha \in (1,e)$και για κάθε $x \in [\alpha, e]$ισχύει:

$$1 < \alpha \le x \le e \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 < \ln\alpha \le \ln x \le \frac{x}{e} \Rightarrow \frac{1}{\ln x} \ge \frac{e}{x} \Rightarrow \frac{1}{\ln x} - \frac{e}{x} \ge 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=e.

Επομένως είναι:

$$\int_\alpha^e \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{e}{x}\right) dx > 0 \Rightarrow \int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx - \int_\alpha^e \frac{e}{x} dx > 0 \Rightarrow$$

$$\int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx > \int_\alpha^e \frac{e}{x} dx = e[\ln x]_\alpha^e = e \cdot (\ln e - \ln\alpha) = e\ln\left(\frac{e}{\alpha}\right) =$$

$$= \ln\left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^e\right] \overset{(e^x \uparrow IR)}{\Rightarrow} e^{\int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx} > e^{\ln\left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^e\right]} \Rightarrow e^{\int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx} > \left(\frac{e}{\alpha}\right)^e$$

4) $\ldots \alpha^\beta \cdot \beta^\alpha = e^{\frac{2\alpha\beta}{e}} \; : (E)$

Έχουμε: $(E) \Leftrightarrow \ln\left(\alpha^\beta \cdot \beta^\alpha\right) = \ln\left(e^{\frac{2\alpha\beta}{e}}\right)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^\beta\right) + \ln\left(\beta^\alpha\right) = \frac{2\alpha\beta}{e} \Leftrightarrow \beta\ln\alpha + \alpha\ln\beta = \frac{2\alpha\beta}{e} \Leftrightarrow \frac{\beta\ln\alpha + \alpha\ln\beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} + \frac{\ln\beta}{\beta} = \frac{2}{e} \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) = \frac{2}{e} \qquad : (\Sigma)$$

Από το (2) ερώτημα έχουμε ότι για κάθε x>0 ισχύει:

$f(x) \le \max f(x) = f(e) = \frac{1}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=e.

Έτσι ισχύουν: $f(\alpha) \le \frac{1}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για α=e και $f(\beta) \le \frac{1}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για β=e

Έτσι είναι $f(\alpha) + f(e) \le \frac{2}{e}$ και την ισότητα να ισχύει μόνο όταν α=e και β=e . Επομένως για να ισχύει η (Σ), οπότε και η ισοδύναμη της σχέση (Ε) , πρέπει και αρκεί να είναι α=β=e

5) Έχουμε: $2^x = x^2,\ x > 0$

$$\Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln(x^2),\ \ x > 0 \Leftrightarrow x\ln 2 = 2\ln x,\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2},\ x > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\ln 2}{2},\ x > 0$$

Έτσι η εξίσωση: $2^x = x^2,\ x > 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = \frac{\ln 2}{2}$

Για το $x_1=2 \in (0, e]$ ισχύει $f(2) = \frac{\ln 2}{2}$ οπότε το $x_1=2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \frac{\ln 2}{2}$ και μάλιστα μοναδική στο $(0, e]$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0, e]$

Για το $x_2=4 \in (e, +\infty)$ ισχύει $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$

οπότε το $x_2=4$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \frac{\ln 2}{2}$ και μάλιστα μοναδική στο $(e, +\infty)$ αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $(e, +\infty)$.

Από τα παρακάτω προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{\ln 2}{2}$ οπότε και η ισοδύναμή της εξίσωσης $2^x=x^2$,x> 0 έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $(0, +\infty)$ οι οποίες είναι :$x_1=2$,$x_2=4$.

ΘΕΜΑ 5

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR→IRισχύει

$$f\,'(x) = 3x^2 + \left(\int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0)\right)\cdot \int_{x}^{x+1} e^{t\cdot f(t)}dt$$

για κάθε x∈IR και f(2)=f(1)+7

1. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(1,2) , ώστε $f\,'(\xi)=3\xi^2$

2. Να δείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(0)$

3. Να βρεθεί ο τύπος της f

4.Έστω (ε) η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της Μ (α,f(α)) , με α > 0

α) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την εφαπτομένη (ε)

β) Αν το α αυξάνεται με ρυθμό 3cm/sec(τα μήκη των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων είναι 1cm) να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς τον χρόνο t την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία είναι $E=108cm^2$

ΛΥΣΗ

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3$

   Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-3x^2$,

   οπότε η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο (1,2).

Ακόμη είναι $g(1)=f(1)-1^3=f(1)-1$ και $g(2)=f(2)-2^3=f(2)-8$

Είναι όμως $f(2)=f(1)+7$, οπότε $g(2) =(f(1)+7)-8=f(1)-1$.

Άρα είναι $g(2)=g(1)$

Επομένως η gικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle

στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(\xi)-3\xi^2=0\Leftrightarrow f'(\xi)=3\xi^2$

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x\in$IRισχύει :

$$f'(x) = 3x^2 + \left(\int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0)\right)\cdot\int_{x}^{x+1} e^{tf(t)}dt \quad : (1)$$

Από την (1) για $x=\xi$ έχουμε:

$$f'(\xi) = 3\xi^2 + \left(\int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0)\right)\cdot\int_{\xi}^{\xi+1} e^{t\cdot f(t)}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\xi^2 = 3\xi^2 + \left(\int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0)\right)\cdot\int_{\xi}^{\xi+1} e^{t\cdot f(t)}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0)\right)\cdot\int_{\xi}^{\xi+1} e^{t\cdot f(t)}dt = 0 \qquad : (2)$$

είναι $\xi < \xi+1$ και για κάθε $t \in [\xi, \xi+1]$

ισχύει $e^{t\cdot f(t)}dt > 0$, οπότε είναι $\int_{\xi}^{\xi+1} e^{t\cdot f(t)}dt > 0$

Έτσι απο την (2) προκύπτει ότι

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0) = 0 \qquad : (3)$$

3. Από την (1) λόγω της (3) έχουμε ότι για κάθε $x \in IR$ ισχύει :

$$f\,'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)' = \left(x^3\right)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 + c\,,\left(c \in IR \text{ σταθερά}\right)$$

Έχουμε όμως $\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(0) \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(t^3 + c\right)dt = 0^3 + c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{t^4}{4} + ct\right]_{-1}^{1} = c \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + c\right) - \left(\frac{1}{4} - c\right) = c \Leftrightarrow 2c = c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα $f(x) = x^3, x \in IR$ (ικανοποιεί την υπόθεση)

4. α) Είναι $f(x) = x^3$, $f\,'(x) = 3x^2$, $f(\alpha) = \alpha^3$, $f\,'(\alpha) = 3\alpha^2$
οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της Μ $(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 0$

είναι $y - f(\alpha) = f\,'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \alpha^3 = 3\alpha^2(x - \alpha) \Leftrightarrow y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$

Άρα είναι (ε) : $y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών της ευθείας (ε)

και της C_f

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$

Έχουμε : $f(x) = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \Leftrightarrow x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - \alpha^3 - 3\alpha^2 x + 3\alpha^3 = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)\left(x^2 + \alpha x + \alpha^2\right) - 3\alpha^2(x - \alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)\left(x^2 + \alpha x - 2\alpha^2\right) = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(x - \alpha)(x + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 \cdot (x + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \alpha)^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x + 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ \text{ή} \\ x = -2\alpha \end{cases}$$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και (ε) είναι $M\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ και $N\left(-2\alpha, f(-2\alpha)\right)$

Το εμβαδόν του χωρίου Ω όπου περικλείεται από την C_f και

την (ε) είναι: $E=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left|f(x)-\left(3\alpha^2x-2\alpha^3\right)\right|dx=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left|x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3\right|dx$

Είναι $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=\left(x-\alpha\right)^2\left(x+2\alpha\right)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[-2\alpha,\alpha\right]$, $\left(\alpha>0\right)$

Έτσι είναι:

$$E=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left(x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3\right)dx=\int_{-2\alpha}^{\alpha}x^3dx-3\alpha^2\int_{-2\alpha}^{\alpha}xdx+\int_{-2\alpha}^{\alpha}2\alpha^3dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2\alpha}^{\alpha}-3\alpha^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2\alpha}^{\alpha}+2\alpha^3\left(\alpha-\left(-2\alpha\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\alpha^4-16\alpha^4\right)-\frac{3\alpha^2}{2}\left(\alpha^2-4\alpha^2\right)+6\alpha^4=$$

$$=-\frac{15}{4}\alpha^4+\frac{9\alpha^4}{2}+6\alpha^4=\frac{27}{4}\alpha^4\ \ cm^2.$$ Άρα είναι $E=\frac{27}{4}\alpha^4\left(cm^2\right)$.

β) Έστω κατά την χρονική στιγμή t sec είναι $\alpha=\alpha(t)$ cm και $E=E(t)$ cm^2.

Είναι $E(t)=\frac{27}{4}\alpha^4(t)$, οπότε παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε

$E'(t)=\frac{27}{4}4\alpha^3(t)\alpha'(t)=27\alpha^3(t)\cdot\alpha'(t)$

Για την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία είναι $E=108cm^2$

Έχουμε $E'(t_o)=27\alpha^3(t_o)\cdot\alpha'(t_o)$

Έχουμε όμως :

$$\alpha'\left(t_o\right)=3cm/\sec \text{ και } E\left(t_o\right)=108\Leftrightarrow\frac{27}{4}\alpha^4\left(t_o\right)=108\Leftrightarrow\alpha^4\left(t_o\right)=16\overset{\alpha(t_o)>0}{\Leftrightarrow}\alpha\left(t_o\right)=2\left(cm\right)$$

Έτσι ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι :

$$E'\left(t_o\right)=27\cdot 2^3\cdot 3=648\,cm^2/sec$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Για την συνάρτηση f:IR→IR ισχύει $2f(x)+f(1-x)=x+1$

   για κάθε x∈IR.Να βρεθεί ο τύπος της f.

2. Για την συνάρτηση f:IR→IR ισχύει $\left(f(x)\right)^2\cdot f(1-x)=e^{x+1}$

   για κάθε x∈IR.Να βρεθεί ο τύπος της f.

3. Για την συνάρτηση $f:\left[0,1\right]\to IR$ ισχύει $\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|x-y\right|$ για κάθε $x,y\in\left[0,1\right]$ και είναι f(0)=0 και f(1)=1.

   Να βρείτε τον τύπο της f.

4. Για την συνάρτηση $f:IR_+^*\to IR$ ισχύει
   $f(x)\ge \ln x+x$ για κάθε $x>0$ και είναι
   : $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x}$ για κάθε $x>0$.

   Να βρεθεί ο τύπος της f.

5. Η συνάρτηση f:IR→IR είναι γνησίως αύξουσα στο IR και ισχύει
   $f\left(2f\left(x\right)\right)=\frac{x}{2}$, για κάθε $x\in R$.

   Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\frac{x}{2}$, $x\in R$.

6. Για την συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει $f\left(f(x)\right)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in IR$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

   Να δείξετε ότι $f(x)=x$, $x\in IR$.

7. Για την συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει $\left|f(x)-f(y)\right|\le 2\left|x-y\right|$ για κάθε $x,y\in IR$.

   α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

   β) Αν επιπλέον ισχύει $f\left(f(x)\right)+3x=4f(x)$ για κάθε $x\in IR$, να βρείτε τον τύπο της f.

8. Αν για την συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει $\left|f(x)-f(y)\right|\le\left(e^x-e^y\right)^2$ για κάθε $x,y\in IR$.

   Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή .

9. α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και η παράγωγος της .

   β) Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $f\,'(x)=\sqrt{1+f^2(x)}$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=0$.

10. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to IR$

    ισχύει $f\,'(x)=f^2(x)$ για κάθε $x\geq 0$ και $f(0)=-1$.

    α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-\int_0^x f(t)dt}, x\geq 0$

    είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.

    β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

11. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης

    $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $f(x)\cdot f\,'(x)=e^{2x}$

    για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=1$.

12. Να βρεθεί ο τύπος της δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR^*\to IR$ για την οποία ισχύει $x^2\cdot f\,''(x)=1$ για κάθε $x\neq 0$.

13. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $f\,'(x)=e^{f(x)-x}$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=0$.

14. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει

    $f\,'(x)=f(x)+e^x\cdot συνx$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=0$.

15. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : IR \to IR$ για την οποία ισχύει $\left(f\,'(x) + f(x)\right)e^{2x} = f(x) - f\,'(x)$ για κάθε $x \in IR$ και $f(0)=1$.

16. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR \to IR$ ισχύει
$\left(f\,'(x)\right)^2 \leq -f(\alpha)\cdot f(\alpha+1)$ για κάθε $x \in IR$, $(\alpha \in IR)$.

Να δείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x \in IR$.

17. Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR_+^* \to IR$ ισχύει
$f\,''(x)\cdot e^{2f(x)} = -1$ για κάθε $x \in IR_+^*$

και $f(1)=0$, $f\,'(1)=1$.

Να βρεθεί ο τύπος της f.

18. Να βρείτε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : IR \to IR$,

με $f(0)=1$ και $g(0)=-1$, αν για κάθε $x \in IR$ ισχύουν
$f\,'(x)\cdot g(x) = 2e^x$ και $f(x)\cdot g\,'(x) = -3e^x$.

19. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR_+^* \to IR$ ισχύει

$xyf(xy) = xf(x) + yf(y)$ για κάθε $x, y \in IR_+^*$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 1$.

1) Να βρεθεί το $f'(1)$.

2) Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

3) Να βρείτε τον τύπο της f.

20. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \pi) \to IR$ ισχύει
$f'(x) \cdot ημx = f(x) \cdot συνx + f(x) \cdot ημx$

για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

21. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης
$f : (0, +\infty) \to IR$ για την οποία ισχύει
$f'(x) = -2\left(f(x)\right)^3$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

22. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to IR$ για την οποία

ισχύει

$f(x) = 1 + \int_0^x \dfrac{1 - f(t)ημt}{συνt}\, dt$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

23. Για την συνεχή συνάρτηση f:IR→IR ισχύει

$$9\cdot\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 + x^2 = f(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in IR.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

24. Για την συνεχή συνάρτηση $f:[0,1] \to IR$ ισχύει

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{12}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

25. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to IR$

για την οποία ισχύουν f(1)=0 και $f\,'(x) - \int_1^e \frac{f(t)}{t}dt = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

26. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: IR \to IR^*$ για την οποία ισχύει

$\int_0^x e^t f(x-t)dt = ημ^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

27. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to IR$ ισχύει

$f(x)=x^{2013}\cdot(1-x)^{2014}\cdot f'(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Να δείξετε ότι $f(x)=0$, $x\in[0,1]$.

28. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to IR$ ισχύει

$f(x)=x^2+(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)^2\cdot(f'(x)-2x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να δείξετε ότι $f(x)=x^2$, $x\in[\alpha,\beta]$.

29. Για την συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to IR$ ισχύει

$\int_0^1 f^2(x)dx=4\int_0^1 xf(x)dx-\frac{4}{3}$.

Να δείξετε ότι $f(x)=2x$, $x\in[0,1]$.

30. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$f'(x)=1+f(x)-f(1-x)$, για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=1$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

31. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{IR}\to\mathbb{IR}$ ισχύει

$$f\,'(x)=f^2(x)\cdot f(-x),\ \forall x\in \mathbb{IR} \text{ και } f(0)=1.$$

Να βρεθεί η συνάρτηση f.

32. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$f:\mathbb{IR}\to\mathbb{IR}$ για την οποία ισχύει

$1+f\,'(x)=\left(2x+1\right)e^{x^2+1-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{IR}$ και $f(0)=1$.

33. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:\mathbb{IR}\to\mathbb{IR}$ για την οποία ισχύει $e^x\cdot f\,'(x)=\text{συν}x$ για κάθε $x\in\mathbb{IR}$ και $f(0)=1$.

34. Για την συνάρτηση $f:\mathbb{IR}_+^*\to\mathbb{IR}$ ισχύει $\left|yf(x)-xf(y)\right|\le xy\left(x-y\right)^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{IR}_+^*$

1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x>0$ είναι σταθερή .

2) Να βρείτε τον τύπο της f.

35. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει

$$3x\cdot\int_0^1 f(x\cdot t)dt+6\int_0^{\frac{x}{2}} f(2t)dt=2\int_0^x xtdt+x^3 \text{ για κάθε } x\in IR.$$

36. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f:IR\to IR$ με $f(x)=\int_1^e t^x dt$.

(*χωρίς το σύμβολο του ολοκληρώματος*)

37. Για την συνεχή συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$$2\cdot\int_0^x f(t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t)dt=2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x\in IR.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

38. Για την συνεχή συνάρτηση $f:IR_+^*\to IR$ ισχύει

$$f(x)=\int_1^x \frac{t+1}{te^{f(t)}+t}dt \text{ για κάθε } x>0.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

39. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$$f(x+y)\geq f(x)+f(y)+2xy \text{ για κάθε } x,y\in IR$$

και είναι $f(0)=f'(0)=0$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

40. Για την συνεχή συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$$f(x)=\left(2+\eta\mu x\right)\cdot\left(\int_0^x \frac{f(t)}{2+\eta\mu t}dt+1\right) \text{ για κάθε } x\in IR.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

41. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR_+^*\to IR$ ισχύει

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{xh}-1\right)\left(f(x+2h)-f\left(x+h\right)\right)}{h^2}=\left(x-1\right)f(x) \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=e.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

42. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $\int_{f(x)+1}^{f'(x)}\left(f^2(t)-f(t)\right)dt+f'(x)=f(x)+1$ για κάθε $x\in IR$ και f(0)=0.

43. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^x e^t\cdot f\left(x-t\right)dt=f(x)+e^x \text{ για κάθε } x\in R.$$

44. α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & ,x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

β) Να βρείτε τις παράγουσες της f.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , των ευθειών $x=0$, x=e και του άξονα $x'x$.

45. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2\cdot f(x)-\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(x\cdot t)dt=\dfrac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$ για κάθε $x>0$.

46. Για τη συνάρτηση f:R→R ισχύει f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y) για κάθε x,y∈R και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=0$ με $f'(0)=0$.

1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

2) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3$, x∈R.

47. Για τη συνεχή συνάρτηση f : (-1,1)→R ισχύει

$$ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)=x \text{ για κάθε } x\in(-1,1).$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.