Master Class 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο **Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ** παρουσιάζει

11 εξισώσεις που ζητούν λύση

Γιάννης Αηλακίδης

2η περίοδος 2011-2012

ΘΕΜΑ 1.

Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 \cdot \ln x = e \quad , \quad x > 0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε :

$$
\begin{aligned}
&2x^2\ln x = e,\ x > 0\\
&\Leftrightarrow 2\ln x = \frac{e}{x^2},\ \ x > 0\\
&\Leftrightarrow 2\ln x - \frac{e}{x^2} = 0,\ \ x > 0
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=2\ln x-\frac{e}{x^2}, x>0$

Είναι φανερό ότι η εξίσωση $2x^2\ln x=e$, $x>0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$f(x) = 0$, $x>0$.

Είναι $f'(x) = 2\frac{1}{x} + \frac{2e}{x^3} > 0$,για κάθε $x>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε

η f είναι συνάρτηση 1-1.

Με $x>0$ έχουμε : $f(x)=0$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{e}) \qquad \left(\text{αφού } f(\sqrt{e}\,) = 2\ln(\sqrt{e}) - \frac{e}{(\sqrt{e})^2} = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{e}{e} = 0\right)\\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{e} \ \ (\text{αφού η f είναι 1-1})
\end{aligned}
$$

Επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση στο $(0,+\infty)$,τον αριθμό $x_0=\sqrt{e}$

ΘΕΜΑ 2.

Να λυθεί η εξίσωση $3^{x^2-x-2}=\dfrac{1+2^{x^2}}{1+4\cdot 2^x},\ x\in IR$

ΛΥΣΗ

Έχουμε :

$$3^{x^2-x-2}=\frac{1+2^{x^2}}{1+4\cdot 2^x}\Leftrightarrow \frac{3^{x^2}}{3^{x+2}}=\frac{1+2^{x^2}}{1+2^{x+2}}\Leftrightarrow \frac{1+2^{x+2}}{3^{x+2}}=\frac{1+2^{x^2}}{3^{x^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x+2)=f(x^2)\text{, όπου } f(x)=\frac{1+2^x}{3^x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x,\ x\in IR$$

Είναι $f'(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$ για κάθε $x\in IR$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

Η f ως γνησίως μονότονη στο IR είναι συνάρτηση 1-1 . Ετσι έχουμε :

$$f(x+2)=f(x^2)\Leftrightarrow x+2=x^2\quad (f\ \text{΄1-1΄})$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2$$

Άρα η εξίσωση $3^{x^2-x-2}=\dfrac{1+2^{x^2}}{1+4\cdot 2^x}$ έχει ακριβώς δυο λύσεις στο R οι οποίες

είναι $x_1=-1, x_2=2$

ΘΕΜΑ 3.

Να λυθεί η εξίσωση $10^x+11^x+12^x=13^x+14^x, x\in IR$

(ADREESCU 101 PROBLEMS)

ΛΥΣΗ

... $10^x+11^x+12^x=13^x+14^x$ (1)

$$\text{Έχουμε}: (1) \Leftrightarrow \frac{10^x+11^x+12^x}{13^x}=\frac{13^x+14^x}{13^x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{11}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x-\left(\frac{14}{13}\right)^x=1$$

$$\Leftrightarrow f(x)=1 \text{ , όπου } f(x)=\left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{11}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x-\left(\frac{14}{13}\right)^x, x\in IR$$

$$\text{Είναι } f'(x)=\left(\frac{10}{13}\right)^x\ln\left(\frac{10}{13}\right)+\left(\frac{11}{13}\right)^x\ln\left(\frac{11}{13}\right)+\left(\frac{12}{13}\right)^x\ln\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{14}{13}\right)^x\ln\left(\frac{14}{13}\right)<0$$

για κάθε $x\in IR$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR

Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1

παρατηρούμε ότι f(2)=….=1

έτσι έχουμε : $(1)\Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$ (αφού η f είναι ”1-1”)

επομένως η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση στο R τον αριθμό $x_o=2$

ΘΕΜΑ 4.

Να λυθεί η εξίσωση $4^x+2^x+2=5^x+3^x$, $x\in R$

ΛΥΣΗ

… $4^x+2^x+2=5^x+3^x :(1)$

Είναι φανερό ότι ο αριθμός x_o=1 είναι λύση της εξίσωσης (1) ,αφού

$4^1+2^1+2=5^1+3^1$

Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση (1) έχει λύση διαφορετική του x_o=1

Θεωρώ τις συναρτήσεις $f(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{1}{5}\right)^x$ και $g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Είναι $f΄(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^x\ln\left(\frac{1}{5}\right)<0$ για κάθε $x\in IR$

και $g'(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\left(\frac{1}{3}\right)<0$ για κάθε $x\in IR$.

.Άρα οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες στο IR.

Ετσι έχουμε :

$$x>1\Rightarrow\begin{cases}f(x)<f(1)\\ g(x)<g(1)\end{cases}\quad (f,g\downarrow IR)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{1}{5}\right)^x<1\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4^x+1<5^x\\ 2^x+1<3^x\end{cases}\Rightarrow 4^x+2^x+2<5^x+3^x$$

Άρα η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο $(1,+\infty)$

Ακόμη για κάθε $x<1$ έχουμε

$$x<1 \Rightarrow \begin{cases} f(x)>f(1) \\ g(x)>g(1) \end{cases} \; (f,g \downarrow IR)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{4}{5}\right)^x + \left(\dfrac{1}{5}\right)^x > 1 \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^x + 1 > 5^x \\ 2^x + 1 > 3^x \end{cases} \Rightarrow 4^x + 2^x + 2 > 5^x + 3^x$$

Επομένως η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο $(-\infty,1)$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια λύση στο IR, τον αριθμό $x_o=1$

ΘΕΜΑ 5.

Α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η εξίσωση

f(x)=0 έχει στο Δ , $n\geq 2$ ρίζες να αποδείξετε ότι η εξίσωση f΄(x)=0

έχει στο Δ τουλάχιστον n-1 ρίζες

Β. Να λυθεί στο IR η εξίσωση $3^x+2\cdot 4^x=19\cdot x+3$

ΛΥΣΗ

Έστω $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n\in\Delta$ με $\rho_1<\rho_2<...<\rho_n$ $(n\geq 2)$ οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ έπεται ότι η f είναι συνεχής στα

διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],...,[\rho_{n-1},\rho_n]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα
$(\rho_1,\rho_2),...,(\rho_{n-1},\rho_n)$

Ακόμη είναι $f(\rho_1)=f(\rho_2)=...=f(\rho_n)=0$,αφού οι αριθμοί $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ είναι οι ρίζες

της εξίσωσης f(x)=0.

Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle σε καθένα από τα

διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],...,[\rho_{n-1},\rho_n]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2),...,\xi_{n-1}\in(\rho_{n-1},\rho_n)$
ώστε $f'(\xi_1)=0,...,f'(\xi_{n-1})=0$

Άρα η εξίσωση f΄(x)=0 έχει τουλάχιστον n-1 ρίζες στο διάστημα Δ.

Β. $...3^x+2\cdot 4^x=19\cdot x+3\quad :(\varepsilon)$

Έχουμε : $(\varepsilon)\Leftrightarrow 3^x+2\cdot 4^x-19\cdot x-3=0\Leftrightarrow f(x)=0$, όπου

$f(x)=3^x+2\cdot 4^x-19\cdot x-3,\quad x\in IR$

Άρα η εξίσωση (ε) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x)=0

Παρατηρούμε ότι $f(0)=3^0+2\cdot 4^0-19\cdot 0-3=0$ και

$$f(2)=3^2+2\cdot 4^2-19\cdot 2-3=0$$

Άρα οι αριθμοί $x_1=0, x_2=2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0

Για την συνάρτηση f έχουμε :

$f'(x)=3^x\cdot \ln 3+2\cdot 4^x\cdot \ln 4-19$ και

$f''(x)=3^x\cdot (\ln 3)^2+2\cdot 4^x\cdot (\ln 4)^2>0$ για κάθε $x\in R$

Υποθέτουμε ότι οι εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον τρείς πραγματικές ρίζες, τότε:

1. Η εξίσωση f(x)=0 έχει τρείς τουλάχιστον ρίζες στο IR.
2. Η εξίσωση f΄(x)=0 έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο IR.
3. Η εξίσωση f΄΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR.

Άτοπο, αφού είναι f΄΄ (x)>0 για κάθε $x\in$IR.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση f(x)=0, οπότε και η εξίσωση (ε) έχει ακριβώς δυο λύσεις στο IR οι οποίες είναι $x_1=0, x_2=2$

ΘΕΜΑ 6.

Να λυθεί η εξίσωση $3^x+5^x=2\cdot 4^x$, $x\in R$

ΛΥΣΗ

... $3^x+5^x=2\cdot 4^x$: (1)

Είναι φανερό ότι οι αριθμοί $x_1=0$ και $x_2=1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης (1)

(αφού $3^0+5^0=2\cdot 4^0$ και $3^1+5^1=2\cdot 4^1$)

Έστω τώρα ότι η εξίσωση (1) έχει άλλη λύση $x_o\in IR-\{0,1\}$ τότε θα ισχύει

$$3^{x_o}+5^{x_o}=2\cdot 4^{x_o}$$

$$\Leftrightarrow 5^{x_o}-4^{x_o}=4^{x_o}-3^{x_o}\Leftrightarrow \frac{5^{x_o}-4^{x_o}}{5-4}=\frac{4^{x_o}-3^{x_o}}{4-3}\Leftrightarrow \frac{f(5)-f(4)}{5-4}=\frac{f(4)-f(3)}{4-3} \quad :(2)$$

όπου $f(t)=t^{x_o}$, $t>0$

Η συνάρτηση $f(t)=t^{x_o}$,$t>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(t)=x_o\cdot t^{x_o-1}$,

οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα

διαστήματα $[3,4]$ και $[4,5]$, επομένως υπάρχουν $\xi_1\in(3,4)$ και $\xi_2\in(4,5)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}:(\alpha) \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(5)-f(4)}{5-4}:(\beta)$$

Από την (2) λόγω των (α) και (β) έχουμε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\Leftrightarrow x_o\cdot \xi_1^{x_o-1}=x_o\cdot \xi_2^{x_o-1}$

$\Leftrightarrow \xi_1^{x_o-1}=\xi_2^{x_o-1}$(αφού $x_o\neq 0$)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x_o-1}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x_o-1}=\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{0}$$

$$\Leftrightarrow x_o-1=0 \;\; (\text{αφού } 0<\frac{\xi_1}{\xi_2}\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x_o=1$$

Άτοπο αφού $x_o \neq 1$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δυο λύσεις στο R οι οποίες είναι :

$x_1=0$,$x_2=2$

ΘΕΜΑ 7.

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{IR}\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο IR με την f' να είναι συνάρτηση 1-1 , να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(4x-3)=f(2x-1)+f(3x-2)$, $x\in R$

ΛΥΣΗ

... $f(x)+f(4x-3)=f(2x-1)+f(3x-2):(1)$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $x_0=1$ είναι η λύση της εξίσωσης (1) αφού

$f(1)+f(4\cdot 1-3)=f(2\cdot 1-1)+f(3\cdot 1-2)$

Έστω τώρα x>1 τότε είναι $x<2x-1<3x-2<4x-3$

επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[x,2x-1]$ και $[3x-2,4x-3]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x,2x-1)$ και $\xi_2\in(3x-2,4x-3)$ ώστε :

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2x-1)-f(x)}{(2x-1)-x}=\frac{f(2x-1)-f(x)}{x-1} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(4x-3)-f(3x-2)}{(4x-3)-(3x-2)}=$$
$$=\frac{f(4x-3)-f(3x-2)}{x-1}$$

Έχουμε όμως

$$x<\xi_1<2x-1<3x-2<\xi_2<4x-3\Rightarrow \xi_1\neq\xi_2\Rightarrow f'(\xi_1)\neq f'(\xi_2),(f' \text{ συνάρτηση ``1-1''})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f(2x-1)-f(x)}{x-1}\neq\frac{f(4x-3)-f(3x-2)}{x-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(2x-1)-f(x)\neq f(4x-3)-f(3x-2)$$
$$\Rightarrow f(x)+f(4x-3)\neq f(2x-1)+f(3x-2)$$

Επομένως στο $(1,+\infty)$ η εξίσωση (1) δεν έχει λύση

Ομοίως αποδεικνύεται και στο $(-\infty,1)$ η εξίσωση (1) δεν έχει λύση

Επομένως η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια λύση στο IR,τον αριθμό $x_o=1$

ΘΕΜΑ 8.

Αν η συνάρτηση f: IR→IR είναι γνησίως αύξουσα , να λυθεί η εξίσωση

$$f(7\cdot 5^x)+f(4\cdot 3^x)=f(3\cdot 4^x)+f(5\cdot 7^x) \quad , x\in R$$

ΛΥΣΗ

… $f(7\cdot 5^x)+f(4\cdot 3^x)=f(3\cdot 4^x)+f(5\cdot 7^x) \quad :(1)$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $x_o=1$ αποτελεί λύση της εξίσωσης (1), αφού

$f(7\cdot 5^1)+f(4\cdot 3^1)=f(35)+f(12)$
και $f(3\cdot 4^1)+f(5\cdot 7^1)=f(12)+f(35)$,
οπότε $f(7\cdot 5^1)+f(4\cdot 3^1)=f(3\cdot 4^1)+f(5\cdot 7^1)$

Για x>1 έχουμε

$$\begin{cases}\left(\frac{7}{5}\right)^x>\left(\frac{7}{5}\right)^1, & \left(\left(\frac{7}{5}\right)^x\uparrow R\right)\\ \left(\frac{4}{3}\right)^x>\left(\frac{4}{3}\right)^1, & \left(\left(\frac{4}{3}\right)^x\uparrow R\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{7^x}{5^x}>\frac{7}{5}\\ \frac{4^x}{3^x}>\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\cdot 7^x>7\cdot 5^x\\ 3\cdot 4^x>4\cdot 3^x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(5\cdot 7^x)>f(7\cdot 5^x)\\ f(3\cdot 4^x)>f(4\cdot 3^x)\end{cases} \quad (f\uparrow IR)$$

$$\Rightarrow f(7\cdot 5^x)+f(4\cdot 3^x)<f(3\cdot 4^x)+f(5\cdot 7^x)$$

Επομένως στο $(1,+\infty)$ η εξίσωση (1)δεν έχει λύση ,όμοια αποδεικνύεται ότι και στο $(-\infty,1)$ η εξίσωση (1) δεν έχει λύση .

Επομένως η εξίσωση (1) έχει μια μόνο λύση στο IR ,τον αριθμό $x_o=1$

ΘΕΜΑ 9.

Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: IR \to IR_+^*$ ισχύει

$f(x)f''(x) > (f'(x))^2$ για κάθε $x \in IR$

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}, x \in IR$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\left(\dfrac{f(2x)}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^{xf'(x)}$, $x \in R$

ΛΥΣΗ

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο IR ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{(f'(x))' f(x) - f'(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} > 0$$

για κάθε $x \in IR$ (αφού για κάθε $x \in IR$ έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)f''(x) > (f'(x))^2 \\ (f(x))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)f''(x) - (f'(x))^2 > 0 \\ (f(x))^2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \frac{f(x)f'(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} > 0 \right\}$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR

$$\beta)...\left(\frac{f(2x)}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^{xf'(x)} : (1)$$

$$\text{έχουμε} : (1) \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{f(2x)}{f(x)}\right)^{f(x)}\right] = \ln(e^{xf'(x)})$$

$$\Leftrightarrow f(x)\cdot \ln\left(\frac{f(2x)}{f(x)}\right) = xf'(x) \Leftrightarrow f(x)(\ln(f(2x)) - \ln(f(x))) = xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(f(2x)) - \ln(f(x)) = \frac{xf'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \ h(2x) - h(x) = x\cdot h'(x) : (E)$$

Όπου h(x)=ln(f(x)) για την οποία είναι h΄(x)= $\frac{f'(x)}{f(x)} = g(x)$ οπότε η h΄ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Έτσι η εξίσωση (1)είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (Ε)

Είναι φανερό ότι ο αριθμός $x_o=0$ είναι λύση της εξίσωσης (Ε) αφού

$h(2\cdot 0)-h(0)=0\cdot h'(0)$ Έστω τώρα x>0 επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο IR έπεται ότι η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο [x,2x] οπότε υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(2x)-h(x)}{2x-x} = \frac{h(2x)-h(x)}{x} : (\alpha)$$

Έχουμε όμως $x<\xi<2x \Rightarrow h'(x)<h'(\xi)$ $(h'\uparrow IR)$

$$\Rightarrow h'(x) < \frac{h(2x)-h(x)}{x} \overset{x>0}{\Rightarrow} h(2x)-h(x) > x\cdot h'(x)$$

Επομένως στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση (Ε) , οπότε και η ισοδύναμη της εξίσωση (1) δεν έχει λύση .

Ομοίως εργαζόμενοι αποδεικνύεται ότι και στο $(-\infty,0)$ η εξίσωση (1) δεν έχει λύση .Έτσι η εξίσωση (1)έχει ακριβώς μια λύση στο R τον αριθμό $x_o=0$

ΘΕΜΑ 10.

Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $f(x+e^y)>f(x)$ για κάθε $x,y\in R$

α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) να λυθεί η εξίσωση $f(x^2)+\ln x=f(x)$, $x>0$

ΛΥΣΗ

α) …$f(x+e^y)>f(x)$: (1) Εστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$

Από την (1) για $x=x_1\in R$ και $y=\ln(x_2-x_1)\in R$ (αφού $x_2-x_1>0$) έχουμε ότι ισχύει

$f(x_1+e^{\ln(x_2-x_1)})>f(x_1) \Rightarrow f(x_1+(x_2-x_1))>f(x_1) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Επομένως για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) …$f(x^2)+\ln x=f(x)$:(ε)

είναι φανερό ότι η (ε) έχει ως λύση τον αριθμό $x_o=1$, αφού $f(1^2)+\ln 1=f(1)$

Ακόμη για κάθε $x>1$ έχουμε :

$$x>1 \overset{(\ln x\uparrow)}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2>x \\ \ln x>\ln 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x^2)>f(x)\ ,\ (f\uparrow R) \\ \ln x>0 \end{cases} \Rightarrow f(x^2)+\ln x>f(x)$$

Επομένως στο $(1,+\infty)$ η εξίσωση (ε) δεν έχει λύση

Επίσης για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε :

$$0<x<1 \overset{(\ln x \uparrow)}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2 < x \\ \ln x < \ln 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x^2) < f(x) \text{ , } (f \uparrow R) \\ \ln x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x^2)+\ln x<f(x)$$

Επομένως στο (0,1) η εξίσωση (ε) δεν έχει λύση

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση (ε) έχει ακριβώς μία λύση το $x_0=1$.

ΘΕΜΑ 11.

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R και

είναι $f(1)=2$, $f'(1)=1$.

Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε να ισχύει $f(\alpha+\beta-5)+f(\alpha-\beta-1)=2\alpha-4$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$

Επειδή η f είναι κυρτή στο R έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία $\varepsilon: y=x+1$ σε όλο το R με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $M(1,f(1))$. Άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\geq x+1$: (Σ)

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι λόγω της (Σ) έχουμε : $f(\alpha+\beta-5)\geq(\alpha+\beta-5)+1\Leftrightarrow f(\alpha+\beta-5)\geq\alpha+\beta-4$: (2)

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\alpha+\beta-5=1$

Ακόμη λόγω της (Σ) έχουμε $f(\alpha-\beta-1)\geq(\alpha-\beta-1)+1\Leftrightarrow f(\alpha-\beta-1)\geq\alpha-\beta$: (3)

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\alpha-\beta-1=1$

Από (1) και (2) έχουμε ότι ισχύει $f(\alpha+\beta-5)+f(\alpha-\beta-1)\geq 2\alpha-4$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν ισχύουν $\alpha+\beta-5=1$ και $\alpha-\beta-1=1$

Επομένως για να ισχύει $f(\alpha+\beta-5)+f(\alpha-\beta-1)=2\alpha-4$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\begin{cases}\alpha+\beta-5=1\\ \alpha-\beta-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha-\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha=4\\ \beta=2\end{matrix}$$

Άρα είναι $\alpha=4$, $\beta=2$