Ο Ν. Ζανταρίδης προτείνει θέματα Μαθηματικών για την Γ΄ Λυκείου

Επιμέλεια: Περικλής Παντούλας

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για τη συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ ισχύει $\mathbf{f(x+3y)>f(x+2y)}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in\mathbb{R}}$ με $\mathbf{y>0}$.

1) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $\mathbf{f(x)+f(3x-2)=f(2x-1)+f(1)}$.

ΛΥΣΗ

1) Είναι $\mathbf{f(x+3y)>f(x+2y)\ :(1)\ ,\ (x\in\mathbb{R},y>0)}$.

Έστω $\mathbf{x_1,x_2\in\mathbb{R}}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$.

Από την $\mathbf{(1)}$ θέτοντας όπου $\mathbf{x}$ το $\mathbf{3x_1-2x_2}$ και όπου $\mathbf{y}$ το $\mathbf{x_2-x_1>0}$, έχουμε ότι ισχύει :

$$\mathbf{f(3x_1-2x_2+3(x_2-x_1))>f(3x_1-2x_2+2(x_2-x_1))\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)}$$

Άρα, για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in\mathbb{R}}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ ισχύει $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$.

Επομένως η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) … $\mathbf{f(x)+f(3x-2)=f(2x-1)+f(1)\ :(E)}$.

Είναι φανερό ότι το $\mathbf{x_0=1}$ είναι λύση της εξίσωσης (Ε) , αφού :

$$\mathbf{f(1)+f(3\cdot1-2)=f(2\cdot1-1)+f(1)\Leftrightarrow f(1)+f(1)=f(1)+f(1)}$$

Για $\mathbf{x>1}$ έχουμε:

$$\mathbf{x>1\Rightarrow\begin{cases}x>1\\3x-2>2x-1\end{cases}\overset{\substack{f\ \text{γν.αύξουσα}\\ \text{στο}\ \mathbb{R}}}{\Rightarrow}\begin{cases}f(x)>f(1)\\f(3x-2)>f(2x-1)\end{cases}\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow f(x)+f(3x-2)>f(2x-1)+f(1)}$$

Επομένως στο $\mathbf{(1,+\infty)}$ η εξίσωση $\mathbf{(E)}$ δεν έχει λύση.

Για $\mathbf{x<1}$ έχουμε:

$$x<1 \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ 3x-2<2x-1 \end{cases} \overset{\substack{f\ \text{γν.αύξουσα} \\ \text{στο}\ \mathbb{R}}}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x)<f(1) \\ f(3x-2)<f(2x-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)+f(3x-2)<f(2x-1)+f(1)$$

Επομένως στο $(-\infty,1)$ η εξίσωση (E) δεν έχει λύση.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (E) έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι το $x_0=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\le 3f'(x)\le 2\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι σταθεροί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\le 3f'(x)\le 2\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}\ :(2)$, $(\alpha<\beta<\gamma)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$, ώστε:

- $f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ :(2)$ και
- $f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}\ :(3)$

Έτσι η (1), λόγω των (2) και (3) γίνεται:

$$f'(\xi_1)\le 3f'(x)\le 2f'(\xi_2)\ :(4)$$

Από την (4) για $x=\xi_1$ έχουμε:

$$f'(\xi_1)\le 3f'(\xi_1)\Rightarrow 2f'(\xi_1)\ge 0\Rightarrow f'(\xi_1)\ge 0\ :(5)$$

Από την (4) για $x=\xi_2$ έχουμε:

$$3f'(\xi_2)\le 2f'(\xi_2)\Rightarrow f'(\xi_2)\le 0 \ :(6)$$

Από τις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$0\le f'(\xi_1)\le 3f'(x)\le 2f'(\xi_2)\le 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\le 3f'(x)\le 0\Rightarrow 0\le f'(x)\le 0\Rightarrow \boxed{f'(x)=0}$$

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=0$, οπότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. (η σταθερή συνάρτηση ικανοποιεί την υπόθεση)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Για τη συνεχή συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ισχύει : $3f(x)=f(x^3)+f(x^{2011})$ για κάθε $x\in[-1,1]$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $3f(x)=f(x^3)+f(x^{2011}) \ :(1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ έπεται, λόγω του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής, ότι η f παρουσιάζει στο $[-1,1]$ ελάχιστο μ και μέγιστο M.

Αν $x_1\in[-1,1]$ είναι η θέση στην οποία η f παρουσιάζει το ελάχιστο και $x_2\in[-1,1]$ η θέση στην οποία η f παρουσιάζει το μέγιστο, τότε θα είναι $f(x_1)=\mu$ και $f(x_2)=M$.

Από την (1) για $x=x_1$, έχουμε:

$$3f(x_1)=f(x_1^3)+f(x_1^{2011})\Rightarrow 3\mu=f(x_1^3)+f(x_1^{2011}) \ :(2)$$

Επειδή για $x_1\in[-1,1]$ έχουμε $x_1^3,x_1^{2011}\in[-1,1]$, έπεται ότι $f(x_1^3)\ge\mu$ και $f(x_1^{2011})\ge\mu$, οπότε $f(x_1^3)+f(x_1^{2011})\ge 2\mu\overset{(2)}{\Rightarrow}3\mu\ge 2\mu\Rightarrow\boxed{\mu\ge 0}$.

Από την (1) για $x=x_2$, έχουμε:

$$3f(x_2)=f(x_2^3)+f(x_2^{2011}) \Rightarrow 3M=f(x_2^3)+f(x_2^{2011}) \ :(3)$$

Επειδή για $x_2 \in [-1,1]$ έχουμε $x_2^3, x_2^{2011} \in [-1,1]$, έπεται ότι $f(x_2^3) \le M$ και $f(x_2^{2011}) \le M$, οπότε $f(x_2^3)+f(x_2^{2011}) \le 2M \overset{(3)}{\Rightarrow} 3M \le 2M \Rightarrow \boxed{M \le 0}$.

Έτσι για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει:

$$0 \le \mu \le f(x) \le M \le 0 \Rightarrow 0 \le f(x) \le 0 \Rightarrow f(x)=0$$

Άρα ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x \in [-1,1]$. (η $f(x)=0$ ικανοποιεί την υπόθεση).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι εξισώσεις:

i. $f(x)+f(3x)=2f(2x)$

ii. $xf'(x)+f(x)=f(2x)$

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

i. Έχουμε $f(x)+f(3x)=2f(2x) \ :(E_1)$.

Είναι φανερό ότι το $x_0=0$ είναι λύση της εξίσωσης (E_1), αφού:

$$f(0)+f(3\cdot 0)=2f(2\cdot 0).$$

Έστω $x>0$. Επειδή η η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x,2x)$ και $\xi_2 \in (2x,3x)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}=\frac{f(2x)-f(x)}{x} \ :(1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(3x)-f(2x)}{3x-2x}=\frac{f(3x)-f(2x)}{x} \ :(2)$$

Έχουμε όμως:

$$x<\xi_1<2x<\xi_2<3x \Rightarrow \xi_1<\xi_2 \overset{\substack{f' \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \frac{f(2x)-f(x)}{x}<\frac{f(3x)-f(2x)}{x}$$

$$\overset{x>0}{\Rightarrow} f(2x)-f(x)<f(3x)-f(2x)$$

$$\Rightarrow f(x)+f(3x)>2f(2x).$$

Έτσι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x)+f(3x)>2f(2x)$, οπότε η εξίσωση (E_1) δεν έχει λύση στο $(0,+\infty)$. Ομοίως εργαζόμενοι, αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση (E_1) δεν έχει λύση ούτε στο $(-\infty,0)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (E_1) έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$, τον αριθμό $x_0=0$.

ii. Έχουμε $xf'(x)+f(x)=f(2x) \ :(E_2)$.

Είναι φανερό ότι το $x_0=0$ είναι λύση της εξίσωσης (E_2), αφού:

$$0\cdot f'(0)+f(0)=f(2\cdot 0).$$

Έστω $x>0$. Επειδή η η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[x,2x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x} \Leftrightarrow xf'(\xi)=f(2x)-f(x) \ :(\alpha)$$

Έχουμε:

$$xf'(x)-\big(f(2x)-f(x)\big)=$$

$$\overset{(\alpha)}{=} xf'(x)-xf'(\xi)$$

$$=x\big(f'(x)-f'(\xi)\big) \ :(\beta)$$

Έχουμε όμως:

$$x<\xi<2x \overset{\substack{f' \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)-f'(\xi)<0$$

$$\overset{x>0}{\Rightarrow} x\left(f'(x)-f'(\xi)\right)<0$$

$$\overset{(\beta)}{\Rightarrow} xf'(x)-\left(f(2x)-f(x)\right)<0$$

$$\Rightarrow xf'(x)+f(x)<f(2x)$$

Άρα η εξίσωση (E_2) δεν έχει λύση στο $(0,+\infty)$. Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, καταλήγουμε ότι η εξίσωση (E_2) δεν έχει λύση στο $(-\infty,0)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (E_2) έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$, τον αριθμό $x_0=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει :
$f(f(x))=f(-1)e^{f(x)+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΛΥΣΗ

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)>f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0$$

$$\Leftrightarrow \left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}>0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x}+f(x)\left(-e^{-x}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x}+f(x)\left(-e^{-x}\right)'>0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)'>0$$

$$\Leftrightarrow\ g'(x)>0,\text{ όπου } g(x)=f(x)e^{-x}, x\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η g είναι συνάρτηση $1-1$.

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&f(f(x)) = f(-1)e^{1+f(x)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f(f(x)) = f(-1)e^{1}e^{f(x)} \\
&\Leftrightarrow f(f(x))e^{-f(x)} = f(-1)e^{-(-1)} \\
&\Leftrightarrow g(f(x)) = g(-1) \\
&\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = -1
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $f(x) = -1, x \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί τις συνθήκες που δόθηκαν στην άσκηση. Άρα είναι $f(x) = -1, x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$.

1) Να αποδείξετε ότι:

i. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-\alpha} + \dfrac{1}{x-\beta} + \dfrac{1}{x-\gamma}$

ii. $\dfrac{\alpha}{f'(\alpha)} + \dfrac{\beta}{f'(\beta)} + \dfrac{\gamma}{f'(\gamma)} = 0$

2) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

3) Να αποδείξετε ότι το ξ_1 είναι θέση τοπικού μεγίστου και το ξ_2 θέση τοπικού ελαχίστου της f.

4) Να αποδείξετε ότι:

i. το ξ_1 είναι πλησιέστερα στο α από ότι στο β.

ii. το ξ_2 είναι πλησιέστερα στο γ από ότι στο β.

ΛΥΣΗ

1) Είναι $f'(x) = (x-\beta)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\beta)$

1. Έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}=$$

$$=\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}+\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$$=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$

2. Είναι:

- $f'(\alpha)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+(\alpha-\alpha)(\alpha-\gamma)+(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$
- $f'(\beta)=(\beta-\beta)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)(\beta-\beta)=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$
- $f'(\gamma)=(\gamma-\beta)(\gamma-\gamma)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\gamma)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\alpha}{f'(\alpha)}+\frac{\beta}{f'(\beta)}+\frac{\gamma}{f'(\gamma)}=\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha(\beta-\gamma)-\beta(\alpha-\gamma)+\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$$

$$=\frac{\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma-\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$$

$$=\frac{0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=0$$

2) Είναι $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$,
$f(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\beta)(\beta-\gamma)=0$ και
$f(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\gamma)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$, οπότε η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$, $[\beta,\gamma]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α,β) και (β,γ). Ακόμη είναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$, οπότε η f

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Επομένως υπάρχουν:

- $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$ και
- $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$ και

3) Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)= \\ &= 3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \end{aligned}$$

Από το ερώτημα (2) συμπεραίνουμε ότι οι ξ_1,ξ_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες του τριωνύμου $f'(x)$, οπότε το $f'(x)$ γράφεται :

$f'(x)=3(x-\xi_1)(x-\xi_2)$, όπου $\alpha<\xi_1<\beta<\xi_2<\gamma$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ξ_2.

4) • i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} & f'(\xi_1)=0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\xi_1-\beta)(\xi_1-\gamma)+(\xi_1-\alpha)(\xi_1-\gamma)+(\xi_1-\alpha)(\xi_1-\beta)=0 \\ & \Rightarrow (\xi_1-\gamma)[(\xi_1-\beta)+(\xi_1-\alpha)]=-(\xi_1-\alpha)(\xi_1-\beta) \\ & \Rightarrow (\xi_1-\gamma)(2\xi_1-\alpha-\beta)=-(\xi_1-\alpha)(\xi_1-\beta) \\ & \Rightarrow 2\xi_1-\alpha-\beta=-\frac{(\xi_1-\alpha)(\xi_1-\beta)}{\xi_1-\gamma} \quad :(1) \end{aligned}$$

Έχουμε όμως:

$$\alpha<\xi_1<\beta<\xi_2<\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1-\alpha>0 \\ \xi_1-\beta<0 \\ \xi_1-\gamma<0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{(\xi_1-\alpha)(\xi_1-\beta)}{\xi_1-\gamma}<0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2\xi_1-\alpha-\beta<0 \Rightarrow 2\xi_1<\alpha+\beta \Rightarrow \xi_1<\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Επειδή ισχύει $\xi_1<\frac{\alpha+\beta}{2}$, έπεται ότι το ξ_1 βρίσκεται πλησιέστερα στο α από ότι στο β.

- ii) Ομοίως αποδεικνύεται ότι το ξ_2 είναι πλησιέστερα στο γ από ότι στο β.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f\big(2f(x)\big)+f\big(3f(x)\big)=10x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Είναι $f\big(2f(x)\big)+f\big(3f(x)\big)=10x \ :(1)$.

Έστω $y_0\in\mathbb{R}$ τυχαίος. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=y_0$.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=y_0$, τότε θα ισχύει $f(x)\neq y_0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή ισοδύναμα $f(x)-y_0\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $g(x)=f(x)-y_0$, $x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\neq 0$, οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή θα είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-y_0>0 \Leftrightarrow f(x)>y_0 \ :(2)$$

Από την (2) θέτοντας, όπου x το $2f(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(2f(x))>y_0$ και θέτοντας, όπου x το $3f(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(3f(x))>y_0$. Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(2f(x))+f(2f(x))>2y_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 10x>2y_0 \Rightarrow x>\frac{y_0}{5}, \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=y_0$.

Έτσι αποδείξαμε ότι για κάθε $y_0\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=y_0$, οπότε είναι $\mathbb{R}\subseteq f(\mathbb{R})$ και επειδή είναι και $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}$ προκύπτει ότι είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $|f'(x)|\le|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και είναι $f(\alpha)=0$ για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $|f'(x)|\le|f(x)|\ :(1)$. Από την (1) έχουμε :

$$\begin{aligned}
&|f'(x)|\cdot|2f(x)|\le|f(x)|\cdot|2f(x)|\\
&\Rightarrow|2f(x)f'(x)|\le|2f^2(x)|\\
&\Rightarrow\left|\left(f^2(x)\right)'\right|\le 2f^2(x)\\
&\Rightarrow -2f^2(x)\le\left(f^2(x)\right)'\le 2f^2(x)\\
&\Rightarrow\begin{cases}\left(f^2(x)\right)'+2f^2(x)\ge 0\\ \left(f^2(x)\right)'-2f^2(x)\le 0\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\left(f^2(x)\right)' + 2f^2(x)\right)e^{2x} \geq 0 \\ \left(\left(f^2(x)\right)' - 2f^2(x)\right)e^{-2x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(f^2(x)e^{2x}\right)' \geq 0 \\ \left(f^2(x)e^{-2x}\right)' \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x) \geq 0 \\ h'(x) \leq 0 \end{cases} ,$$

όπου $g(x) = f^2(x)e^{2x}, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = f^2(x)e^{-2x}, x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η g είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η h είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x \leq \alpha$ ισχύει $g(x) \leq g(\alpha) \Leftrightarrow f^2(x)e^{2x} \leq f^2(\alpha)e^{2\alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^2(x)e^{2x} \leq 0^2 \cdot e^{2\alpha} \overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} f^2(x) \leq 0 \overset{f^2(x)\geq 0}{\Leftrightarrow} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Άρα για κάθε $x \leq \alpha$ ισχύει $f(x) = 0$.

- Για κάθε $x \geq \alpha$ ισχύει $h(x) \leq h(\alpha) \Leftrightarrow f^2(x)e^{-2x} \leq f^2(\alpha)e^{-2\alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^2(x)e^{-2x} \leq 0^2 \cdot e^{-2\alpha} \overset{e^{-2x}>0}{\Leftrightarrow} f^2(x) \leq 0 \overset{f^2(x)\geq 0}{\Leftrightarrow} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Άρα για κάθε $x \geq \alpha$ ισχύει $f(x) = 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ (άρτιος) και $\alpha_\nu > 0$, ισχύει $xf'(x) > \nu f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1) Να μελετηθεί η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^\nu}$ ως προς τη μονοτονία.

2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $xf'(x) > \nu f(x) \ :(1)$.

1) Είναι $g'(x) = \dfrac{f'(x)x^{\nu} - f(x)\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = \dfrac{xf'(x) - \nu f(x)}{x^{\nu+1}}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $xf'(x) - \nu f(x) > 0 \ :(2)$ και επειδή ο $(\nu+1)$ είναι θετικός περιττός ακέραιος, έπεται ότι:

- για κάθε $x > 0$ ισχύει $\dfrac{xf'(x) - \nu f(x)}{x^{\nu+1}} > 0$
- για κάθε $x < 0$ ισχύει $\dfrac{xf'(x) - \nu f(x)}{x^{\nu+1}} < 0$

Άρα είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.\

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

2) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{x^\nu} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{x^\nu} = \lim_{x\to+\infty} \alpha_\nu = \alpha_\nu$$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \alpha_\nu$.

Από την (1) για $x = 0$ έχουμε:

$0 \cdot f'(0) > \nu f(0) \Rightarrow \nu f(0) < 0 \Rightarrow f(0) < 0$

Έτσι $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x^\nu} = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^\nu} f(x)\right) \overset{\left(\substack{(+\infty)\cdot f(0) \\ f(0)<0}\right)}{=} -\infty$ και

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x^\nu} = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^\nu} f(x)\right) \overset{\left(\substack{(+\infty)\cdot f(0) \\ f(0)<0}\right)}{=} -\infty ,$$

αφού ο ν είναι θετικός άρτιος.

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι:

$$\mathbf{g((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to +\infty} g(x)\right)=(-\infty,\alpha_\nu)}$$

Επειδή η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(-\infty,0)}$ έπεται ότι:

$$\mathbf{g((-\infty,0))=\left(\lim_{x\to 0^-} g(x), \lim_{x\to -\infty} g(x)\right)=(-\infty,\alpha_\nu)}$$

Επειδή είναι $\mathbf{\alpha_\nu > 0}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{0\in g((-\infty,0))}$ και $\mathbf{0\in g((0,+\infty))}$

- ✓ Επειδή $\mathbf{0\in g((-\infty,0))}$ και η $\mathbf{g}$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbf{(-\infty,0)}$, έπεται ότι στο $\mathbf{(-\infty,0)}$ η εξίσωση $\mathbf{g(x)=0}$ έχει ακριβώς μία λύση, οπότε και η εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbf{(-\infty,0)}$.
- ✓ Επειδή $\mathbf{0\in g((0,+\infty))}$ και η $\mathbf{g}$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$, έπεται ότι στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ η εξίσωση $\mathbf{g(x)=0}$ έχει ακριβώς μία λύση, οπότε και η εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbf{(0,+\infty)}$.

Ακόμη είναι $\mathbf{f(0)<0}$,οπότε το 0 δεν είναι λύση της εξίσωσης $\mathbf{f(x)=0}$. Έτσι η εξίσωση $\mathbf{f(x)}$ = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.