ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR \to IR$ ισχύει $f'(x) > 1$,

για κάθε $x \in IR$ και η f' είναι συνεχής

1. Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f-1
2. Αν επιπλέον ισχύει $\int_{f(0)}^{f(x)} \frac{f(t)}{f'\left(f^{-1}(t)\right)} dt + x^2 = \int_0^x \left(f(t) + f(2t)\right) dt$

   για κάθε $x \in IR$, να βρεθεί ο τύπος της f

ΘΕΜΑ 2

Για τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, +\infty] \to IR$ ισχύει:

1. $f(0) = 0$
2. $f\left(g(x)\right) = g\left(f(x)\right), \forall x \geq 0$
3. $f(x) \neq g(x), \forall x \geq 0$
4. η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - x,\ x \geq 0$ είναι αύξουσα

Να δείξετε ότι $f(x) = x,\ x \geq 0$