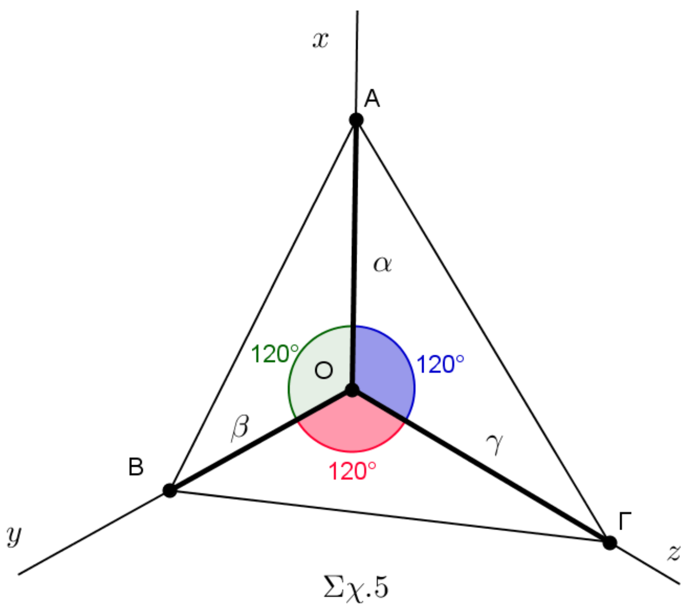
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
Παράρτημα Ημαθίας
Θερινό Σχολείο 2013

Γεωμετρικές Λύσεις σε αλγεβρικά προβλήματα



$\Sigma\chi.5$

Ζανταρίδης Νίκος
Μαθηματικός

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία αποτελεί ένα μικρό σταχυολόγημα από τον ευρύτερο χώρο των Μαθηματικών, όπου η συνεργασία της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία μας δίνει αξιοθαύμαστα αποτελέσματα.

Ειδικότερα στις σελίδες που ακολουθούν μπορεί κανείς να μελετήσει τη λύση δύσκολων αλγεβρικών σχέσεων οι λύσεις των οποίων εδράζονται σε γεωμετρικές καθώς και σε τριγωνομετρικές έννοιες.

Η εργασία αποτελείται από τρία μέρη:

1ο) Χρήσιμες αναφορές

Είναι σύντομες ενθυμίσεις σε προτάσεις της γεωμετρίας καθώς και της τριγωνομετρίας. Αναφέρονται δέκα βασικές προτάσεις που αποτελούν θεμέλιο και μπορούν να στηρίξουν σημαντικά στη λύση γενικά αλγεβρικών προτάσεων.

2ο) Λυμένα θέματα

Παρουσιάζονται πέντε λυμένα θέματα κυρίως ανισώσεις και εξισώσεις τα οποία επεξεργάζονται υποδειγματικά και τα οποία στηρίζονται αποκλειστικά στις ανωτέρω *χρήσιμες αναφορές*.

3ο) Προτεινόμενα θέματα

Προτείνονται δέκα θέματα στα οποία καλείται ο αναγνώστης μαθητής αλλά και οποιοσδήποτε που ασχολείται με τα μαθηματικά να ασχοληθεί και να χαρεί τη γοητεία τη συνεργασία αυτή των επιμέρους κλάδων των μαθηματικών.

Νίκος Ζανταρίδης

Αύγουστος 2013

Χρήσιμες αναφορές

1. Τριγωνική ανισότητα.

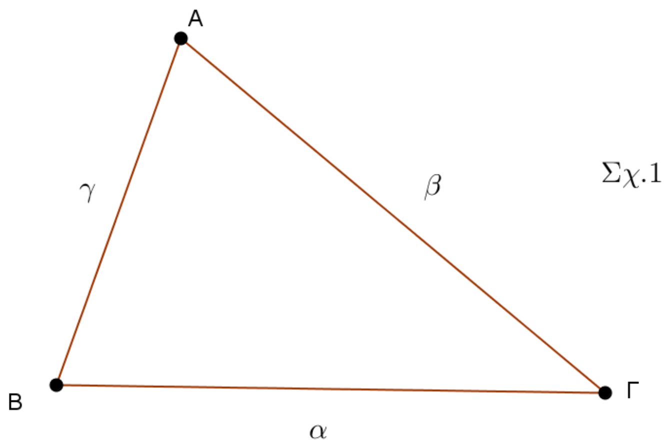
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ (Σχ.1) ισχύουν:

$$|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$$

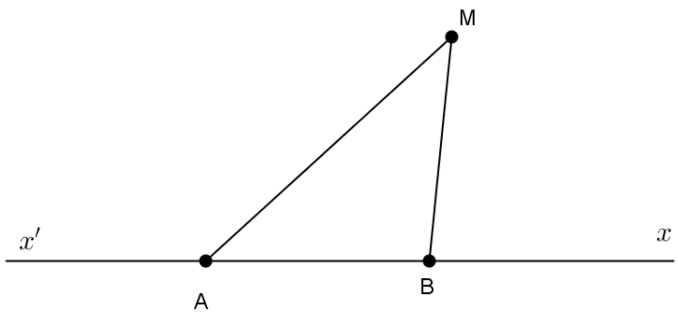
$$|\gamma-\alpha|<\beta<\gamma+\alpha$$

$$|\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta$$

όπου: $\alpha=(\mathrm{B\Gamma}),\quad \beta=(\mathrm{\Gamma A}),\quad \gamma=(\mathrm{AB})$



2. Αν A,B είναι δυο διαφορετικά σημεία μιας ευθείας $x'x$ (Σχ.2), τότε για οποιοδήποτε σημείο M του χώρου ισχύει:



Σχ.2

α) $(MA)+(MB)\geq(AB)$

με την ισότητα να ισχύει μόνον αν το σημείο M είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος AB.

β) $(MA)-(MB)\leq(AB)$

με την ισότητα να ισχύει μόνον αν το σημείο M ανήκει στην ημιευθεία Bx η οποία δεν περιέχει το σημείο A.

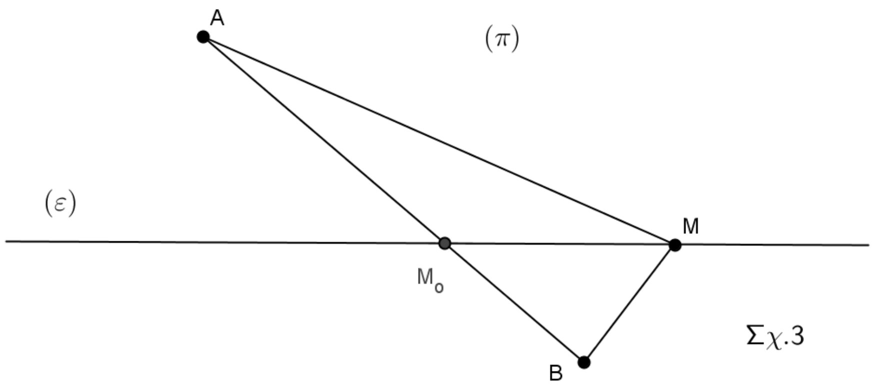
γ) $(MB)-(MA)\leq(AB)$

με την ισότητα να ισχύει μόνον αν το σημείο M ανήκει στην ημιευθεία Ax' η οποία δεν περιέχει το σημείο Β.

δ) $\left|(MA)-(MB)\right| \leq (AB)$

με την ισότητα να ισχύει μόνον αν το σημείο Μ ανήκει στην ημιευθεία Ax' ή στην ημιευθεία Bx.

3. Έστω μια ευθεία (ε) ενός επιπέδου (π) και Α,Β δύο σημεία του επιπέδου (π) που βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας (ε). (Σχ.3)



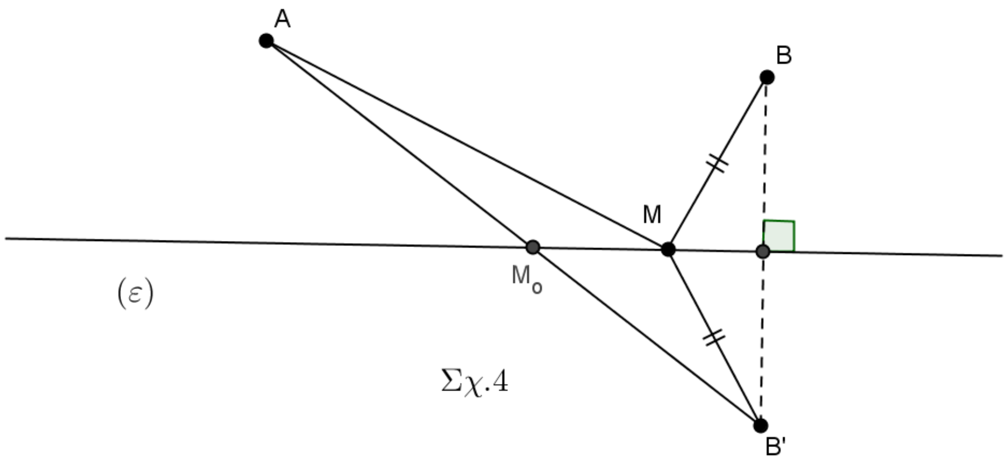
$\Sigma\chi.3$

Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ευθείας (ε) ισχύει:

$$(MA)+(MB) \geq (AB)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον όταν το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο τομής M_o της ευθείας (ε) και του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

4. Έστω μια ευθεία (ε) ενός επιπέδου (π) και Α,Β δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία (ε) και δεν ανήκουν στην ευθεία (ε). (Σχ.4)



$\Sigma\chi.4$

Έστω Β΄ το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία (ε). Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ευθείας (ε) ισχύει:

$$(MA)+(MB)=(MA)+(MB')\geq (AB')$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον όταν το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο τομής M_o της ευθείας (ε) με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ΄.

5. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ισχύουν:

$$\alpha)\ \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \le |\vec{a}\pm\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$\beta)\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$$

$$\gamma)\ -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

$$\delta)\ |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow\nearrow \vec{b}$$

$$\varepsilon)\ |\vec{a}+\vec{b}| = \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow\swarrow \vec{b}$$

$$\sigma\tau)\ |\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow\swarrow \vec{b}$$

$$\zeta)\ |\vec{a}-\vec{b}| = \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow\nearrow \vec{b}$$

$$\eta)\ |\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$$

$$\theta)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow\nearrow \vec{b}$$

$$\iota)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow\swarrow \vec{b}$$

6. Νόμος των συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$$

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

7. Νόμος των ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}=2R$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

8. Τύποι εμβαδού τριγώνου

- $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\upsilon_{\alpha}=\frac{1}{2}\beta\upsilon_{\beta}=\frac{1}{2}\gamma\upsilon_{\gamma}$
- $\mathrm{E}=\tau\rho$

όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και $\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

- $\mathrm{E}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

- $\mathrm{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
- $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu \mathrm{A}=\frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu \mathrm{B}=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu \Gamma$

9. Τριγωνομετρικοί τύποι αθροισμάτων , διαφορών, διπλασίου τόξου.

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(2\alpha)=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(2\alpha)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$$

10. Μέτρο διανύσματος, απόσταση σημείων, αριθμητικό γινόμενο διανυσμάτων(εσωτερικό γινόμενο).

- Αν $\vec{a}=(x,y)$, τότε: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y\in R)$
- Αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου, τότε:

  $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $(x_1,x_2,y_1,y_2\in R)$

- Αν $\vec{a}=(x_1,x_2),\ \ \vec{b}=(x_2,y_2)$, τότε:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2,\quad (x_1,x_2,y_1,y_2\in R)$$

Λυμένα Θέματα

Θέμα Ι

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in R_+^*$, τότε να δειχθεί ότι:

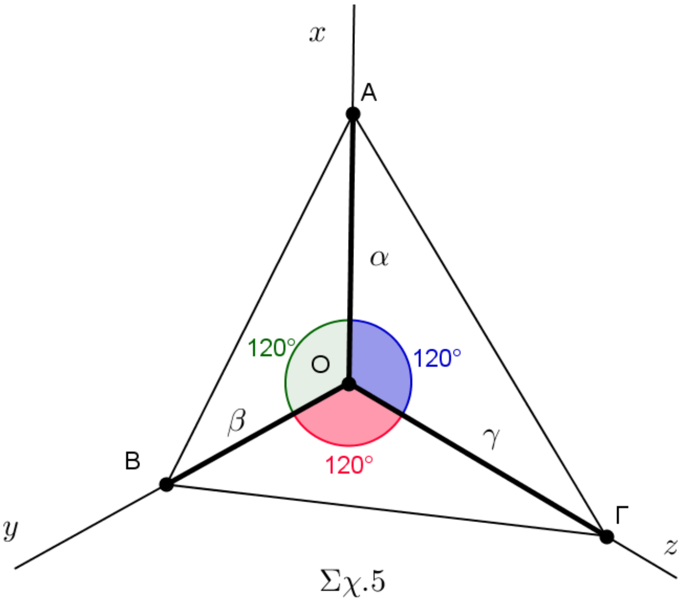
$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}+\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}>\sqrt{\gamma^2+\alpha^2+\gamma\alpha}$$

Λύση:

(**Θυμίζουμε**: Η παράσταση $x^2+y^2\pm\lambda xy$, με $x,y>0$, εμφανίζεται στη εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές x,y και περιεχόμενη γωνία θ για την οποία ισχύει: $2\sigma\upsilon\nu\theta=\lambda$).

Θεωρούμε τις ημιευθείες Ox,Oy,Oz (Σχ.5), του επιπέδου για τις οποίες ισχύει:

$$xOy=yOz=zOx=120^o$$



$\Sigma\chi.5$

Στην ημιευθεία Ox θεωρούμε το σημείο A, ώστε: $(OA)=\alpha$, στην ημιευθεία Oy θεωρούμε το σημείο B, ώστε $(OB)=\beta$ και στην ημιευθεία Oz το σημείο Γ, ώστε $(\mathrm{O\Gamma})=\gamma$.

Από το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ έχουμε:

$$(\mathrm{AB})=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu(120^o)}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}$$

$$(\mathrm{B\Gamma})=\sqrt{\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu(120^o)}=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$$

$$(\mathrm{\Gamma A})=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu(120^o)}=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2+\gamma\alpha}$$

Από το τρίγωνο ΑΒΓ λόγω της τριγωνικής ανισότητας, έχουμε:

$$(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})>(\mathrm{A\Gamma})$$

και σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις τελικά θα είναι:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}+\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}>\sqrt{\gamma^2+\alpha^2+\gamma\alpha}\,.$$

Θέμα II

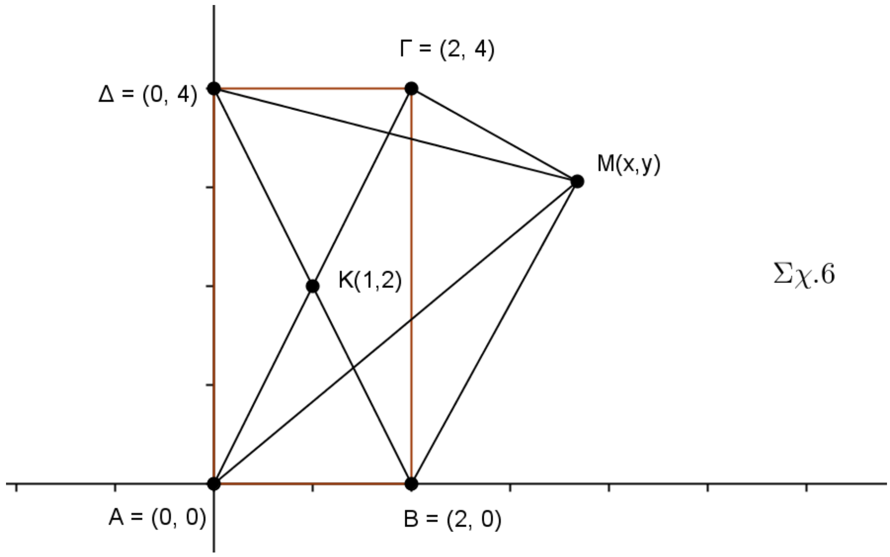
Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=4\sqrt{5}$$

Λύση:

(**Θυμίζουμε:** Οι παραστάσεις της μορφής $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ μπορούν να θεωρηθούν ως αποστάσεις δύο σημείων. Συγκεκριμένα είναι: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=(MA)$, όπου $M(x,y)$ και $A(a,b)$).

Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(2,0), \Gamma(2,4), \Delta(0,4)$ και το μεταβλητό σημείο $\mathrm{M}(x,y)$. (Σχ.6)



$\Sigma\chi.6$

Είναι φανερό ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με κέντρο το σημείο $K(1,2)$. Η δοθείσα σχέση τότε ισοδύναμα γράφεται:

$$(\mathrm{MA})+(\mathrm{M\Delta})+(\mathrm{MB})+(\mathrm{M\Gamma})=4\sqrt{5}\quad (E)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ισχύουν:

1) $(\mathrm{MA})+(\mathrm{M\Gamma})\geq(\mathrm{A\Gamma})=2\sqrt{5}\quad (1)$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν το Μ είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ.

2) $(\mathrm{MB})+(\mathrm{M\Delta})\geq(\mathrm{B\Delta})=2\sqrt{5}\quad (2)$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν το Μ είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΔ.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$(\mathrm{MA})+(\mathrm{MB})+(\mathrm{M\Gamma})+(\mathrm{M\Delta})\geq 4\sqrt{5}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν το σημείο Μ ανήκει συγχρόνως στα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ, δηλαδή μόνον αν το σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ συμπίπτει με το σημείο τομής $K(1,2)$ των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ.

Επομένως για να ισχύει η σχέση:

$$(\mathrm{MA})+(\mathrm{M\Delta})+(\mathrm{MB})+(\mathrm{M\Gamma})=4\sqrt{5}$$

δηλαδή για να ισχύει:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=4\sqrt{5}$$

πρέπει και αρκεί να είναι:

$$(x,y)=(1,2).$$

Θέμα III

Να δειχθεί ότι για κάθε $x,y\in[-1,1]$ ισχύει:

$$\left|xy+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2y^2-x^2-y^2}\right|\le\sqrt{2}$$

(Θέμα Γ΄ Λυκείου(Θαλής) 1995-96)

Λύση:

Επειδή $x,y\in[-1,1]$, υπάρχουν $\theta,\phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, τέτοιοι ώστε: $\eta\mu\theta=x$ και $\eta\mu\phi=y$. Άρα το πρώτο μέλος της ζητούμενης σχέσης γίνεται:

$$\left|xy+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2y^2-x^2-y^2}\right|=$$

$$\left|\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\phi+\eta\mu\theta\sqrt{1-\eta\mu^2\phi}+\eta\mu\phi\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}-\sqrt{1+\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\phi-\eta\mu^2\theta-\eta\mu^2\phi}\right|=$$

$$=\left|\eta\mu\theta\eta\mu\phi+\eta\mu\theta\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\phi}+\eta\mu\phi\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta}-\sqrt{\left(1-\eta\mu^2\theta\right)\left(1-\eta\mu^2\phi\right)}\right|=$$

$$\underset{\sigma\upsilon\nu\phi\ge0,\sigma\upsilon\nu\theta\ge0}{\overset{\phi,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{=}}\left|\eta\mu\theta\eta\mu\phi+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi+\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\theta-\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\phi}\right|=$$

$$\underset{\sigma\upsilon\nu\phi\ge0}{\overset{\sigma\upsilon\theta\ge0}{=}}\left|\left(\eta\mu\theta\eta\mu\phi-\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi\right)+\left(\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi+\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\theta\right)\right|=$$

$$=\left|-\sigma\upsilon\nu(\theta+\phi)+\eta\mu(\theta+\phi)\right|=$$

$$=\left|\sqrt{2}\left(\eta\mu(\theta+\phi)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu(\theta+\phi)\right)\right|=$$

$$=\sqrt{2}\left|\eta\mu(\theta+\phi)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu(\theta+\phi)\right|=$$

$$=\sqrt{2}\left|\eta\mu\left(\theta+\phi-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}\cdot1=\sqrt{2}$$

Άρα για κάθε $x,y\in[-1,1]$ ισχύει:

$$\left|xy+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2y^2-x^2-y^2}\right|\le\sqrt{2}$$

Θέμα IV

Αν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in R$, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}+\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}\ge\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2}$$

Λύση:

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{u_1}=(\alpha_1,\beta_1),\quad \vec{u_2}=(\alpha_2,\beta_2),\quad \vec{u_3}=(\alpha_3,\beta_3)$$

Είναι:

$$\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_1+\beta_2+\beta_3)$$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας έχουμε:

$$|\vec{u_1}|+|\vec{u_2}|+|\vec{u_3}|\ge|\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3}|$$

οπότε ισχύει:

$$\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}+\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}\ge\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2}$$

Θέμα V

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει:

$$x^2+y^2=2x+2y$$

τότε να δειχθεί ότι:

$$4\le|x+y-8|\le 8$$

Λύση:

Θεωρούμε σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων ένα σημείο $M(x,y)$, οι συντεταγμένες του οποίου ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^2+y^2=2x+2y$$

δηλαδή την:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

Επομένως το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο:

$$(c):\ (x-1)^2+(y-1)^2=2$$

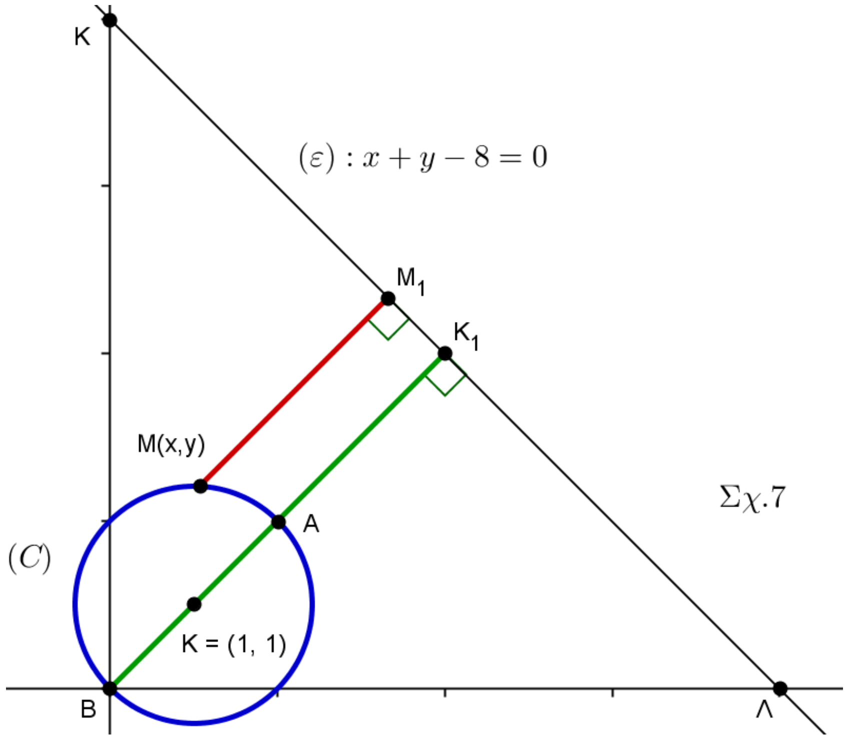
ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$. (Σχ.7)

Θεωρούμε την ευθεία :

$$(\varepsilon):\quad x+y-8=0$$

τότε η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία αυτή είναι:

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|1+1-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$



Ακόμα επειδή είναι:

$$d(K,\varepsilon)>\rho=\sqrt{2}$$

έπεται ότι ο κύκλος (c) και η ευθεία (ε) δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Φέρουμε στη συνέχεια την ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ και είναι κάθετος στην ευθεία (ε). Αυτή τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία Α και Β και την ευθεία (ε) στο σημείο K_1.

Έστω ακόμα M_1 η προβολή του σημείου Μ στην ευθεία (ε).

Τότε θα ισχύει:

$$(\mathrm{AK}_1)\le(\mathrm{MM}_1)\le(\mathrm{BK}_1)$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2}-\sqrt{2}\le\frac{|x+y-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}\le 3\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4\le|x+y-8|\le 8$$

Προτεινόμενα Θέματα

1. Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-8x+17}$$

2. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και ισχύει:

$$\alpha^2+\beta^2=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma^2+\delta^2=6\gamma+8\delta-24$$

να δειχθεί ότι:

$$9 \le (\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2 \le 49$$

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}+\sqrt{\beta^2+\gamma^2} \ge \sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\sqrt{3}\alpha\gamma}$$

4. Να αποδειχθεί ότι:

$$\eta\mu 1^o > \frac{1}{90}$$

5. Έστω: $\theta,\phi,\omega \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, με $\theta+\phi+\omega=\frac{\pi}{3}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$2(\eta\mu\theta+\eta\mu\omega)+\sqrt{3}\eta\mu\phi<2$$

6. Έστω:

$$\theta_1,\theta_2,\theta_3 \in (0,\phi),\quad \phi\in(0,\pi)\quad \mu\varepsilon\quad \theta_1+\theta_2+\theta_3=\phi$$

Να δειχθεί ότι:

$$\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi}{2}\right)+\eta\mu\theta_2+\eta\mu\theta_3<2\eta\mu\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

7. Αν $x,y>0$, τότε να δειχθεί ότι:

$$\sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{x^2+y^2-xy}>2\max\{x,y\}$$

8. Αν $x,y\in[-1,1]$, τότε να δειχθεί ότι:

$$-1\le x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\le 1$$

9. Αν για τους θετικούς αριθμούς x,y,z ισχύουν:

$$x^2+y^2+xy=7$$

$$y^2+z^2+yz=19$$

$$z^2+x^2+zx=13$$

και

$A=xy+yz+zx$

$B=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{13}+\sqrt{19}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{19}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{7}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{13}-\sqrt{19}\right)}$

τότε να δείξετε ότι:

$$A=B$$

10. Αν $a>0$ και $x,y,z\in[0,a]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$x(a-z)+y(a-x)+z(a-y)\le a^2$$

Βιβλιογραφία:

1. Societatea de Stiinte Matematice din Romania: Περιοδικό Gazeta
2. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία: Περιοδικό Ευκλείδης
3. Ν. Ζανταρίδης – Κ. Παπαδόπουλος: Ανισοτικές σχέσεις και μαθηματικοί διαγωνισμοί.
4. 4. Ν. Ζανταρίδης – Κ. Παπαδόπουλος: Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με τη βοήθεια της Γεωμετρίας. Πρακτικά 2ης Μαθηματικής Εβδομάδας. Σελ.248. (2008)