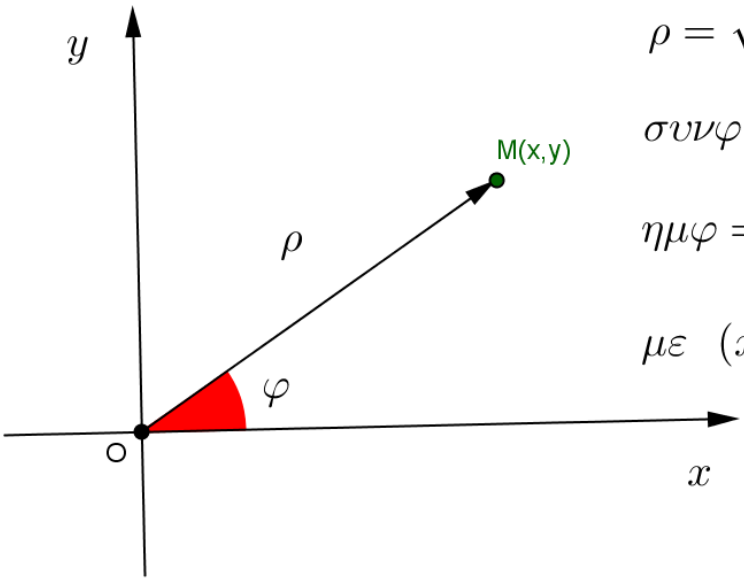
Νίκος Ζανταρίδης

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Χρήσιμες γνώσεις Τριγωνομετρίας

Λυμένες Ασκήσεις

Προτεινόμενες Ασκήσεις



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{\rho}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{y}{\rho}$$

$$\mu\varepsilon \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Αύγουστος 2014

Πρόλογος

Στο μικρό παρόν πόνημα καταβλήθηκε προσπάθεια μιας σύντομης παρουσίασης της βασικής ύλης της Τριγωνομετρίας με στόχο τη βοήθεια των μαθητών των Λυκείων και όχι μόνο.

Αφού ο μαθητής μελετήσει καλά την ύλη των σχολικών εγχειριδίων τότε μπορεί να ασχοληθεί με τη θεματολογία του παρόντος φυλλαδίου και να επεκτείνει τη συλλογιστική του καθώς και την εμπειρία στη λύση σύνθετων πλέον ασκήσεων.

Στα προτεινόμενα θέματα σκόπιμα έχουν προστεθεί μερικά που ήδη έχουν μελετηθεί σε προηγούμενες σελίδες του πονήματος αυτού, με στόχο την επανάληψη και την καλύτερη εμπέδωση της γενικότερης ιδέας που περιέχουν.

Έχοντας την ελπίδα αλλά και την πεποίθηση ότι το μικρό αυτό πόνημα θα συνεισφέρει έστω και τα ελάχιστα στο δύσκολο δρόμο της μελέτης της Τριγωνομετρίας, εύχομαι στους μαθητές και γενικότερα στους αναγνώστες καλό διάβασμα.

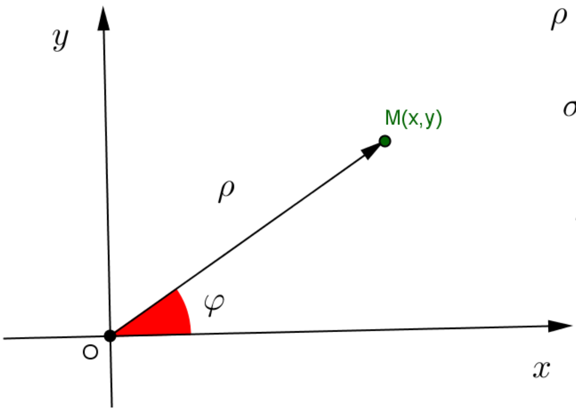
Τέλος ευχαριστώ το φίλο μου Κώστα Δόρτσιο για την επιμέλεια των κειμένων.

Νίκος Ζανταρίδης

Έδεσσα
Αύγουστος 2014

1. ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

1.1 Έστω $\mathrm{M}(x,y)$, με $(x,y)\neq(0,0)$, σημείο του επιπέδου. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα $x'x$ και είναι $(OM)=\rho\,(>0)$, τότε ισχύουν:



$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{x}{\rho}$$

$$\eta\mu\varphi=\frac{y}{\rho}$$

1.2 Για κάθε $\phi\in R$ ισχύει:

$$|\eta\mu\phi|\leq 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad |\sigma\upsilon\nu\phi|\leq 1$$

1.3 Για κάθε $\phi\in R$ ισχύει:

$$\eta\mu^2\phi+\sigma\upsilon\nu^2\phi=1$$

1.4 Αν $x,y\in R$ και ισχύει $x^2+y^2=\rho^2,(\rho>0)$, τότε υπάρχει $\phi\in[0,2\pi)$, ώστε:

$$x=\rho\sigma\upsilon\nu\phi \quad \kappa\alpha\iota \quad y=\rho\eta\mu\phi$$

1.5 Για κάθε $\phi\in R-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}/\kappa\in \mathrm{Z}\right\}$ ισχύουν:

$$\sigma\upsilon\nu^2\phi=\frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\phi},\quad \eta\mu^2\phi=\frac{\varepsilon\phi^2\phi}{1+\varepsilon\phi^2\phi}$$

1.6 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύουν:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\varepsilon\phi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \begin{cases}\alpha+\beta\neq\kappa_1\pi+\frac{\pi}{2}\\ \alpha\neq\kappa_2\pi+\frac{\pi}{2}\\ \beta\neq\kappa_3\pi+\frac{\pi}{2}\\ (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in\mathrm{Z})\end{cases}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta},\quad \acute{o}\pi o\upsilon\quad \begin{cases}\alpha-\beta\neq\kappa_1\pi+\frac{\pi}{2}\\ \alpha\neq\kappa_2\pi+\frac{\pi}{2}\\ \beta\neq\kappa_3\pi+\frac{\pi}{2}\\ (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in \mathrm{Z})\end{cases}$$

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha},\quad \acute{o}\pi o\upsilon\quad \begin{cases}\alpha+\beta\neq\kappa_1\pi\\ \alpha\neq\kappa_2\pi\\ \beta\neq\kappa_3\pi\\ (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in \mathrm{Z})\end{cases}$$

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha},\quad \acute{o}\pi o\upsilon\quad \begin{cases}\alpha-\beta\neq\kappa_1\pi\\ \alpha\neq\kappa_2\pi\\ \beta\neq\kappa_3\pi\\ (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in \mathrm{Z})\end{cases}$$

1.7 Τύποι του διπλασίου τόξου και τριπλασίου τόξου.

- $\eta\mu(2\alpha)=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(2\alpha)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$
- $\varepsilon\varphi(2\alpha)=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha},\quad \begin{cases}\alpha\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ \alpha\neq\lambda\pi\pm\frac{\pi}{4}\\ (\kappa,\lambda\in \mathrm{Z})\end{cases}$
- $\sigma\varphi(2\alpha)=\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha},\quad \begin{cases}\alpha\neq\kappa\pi\\ \alpha\neq\lambda\pi+\frac{\pi}{4}\\ (\kappa,\lambda\in \mathrm{Z})\end{cases}$
- $\eta\mu(3\alpha)=3\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(3\alpha)=4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\varepsilon\varphi(3\alpha)=\dfrac{3\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha},\quad \begin{cases}\alpha\neq\kappa\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\ \alpha\neq\lambda\pi\pm\frac{\pi}{6}\\ (\kappa,\lambda\in \mathrm{Z})\end{cases}$

$$\bullet\ \sigma\phi(3\alpha)=\frac{\sigma\phi^3\alpha-3\varepsilon\phi\alpha}{3\sigma\phi^2\alpha-1},\quad \begin{cases}\alpha\neq\kappa\dfrac{\pi}{3}\\ \alpha\neq\lambda\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\\ (\kappa,\lambda\in\mathrm{Z})\end{cases}$$

1.8 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\eta\mu x=\eta\mu\theta\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\theta\\ \quad\acute{\eta}\\ x=2\lambda\pi+\pi-\theta\end{cases}\quad(\kappa,\lambda\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\theta\\ \quad\acute{\eta}\\ x=2\lambda\pi-\theta\end{cases}\quad(\kappa,\lambda\in\mathrm{Z})$$

$$\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi\theta\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta,\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\phi x=\sigma\phi\theta\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta,\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\varepsilon\phi x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\phi x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\eta\mu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\varepsilon\phi x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\phi x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\eta\mu x=-1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\upsilon\nu x=-1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi,\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\varepsilon\phi x=-1\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

$$\sigma\phi x=-1\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\quad(\kappa\in\mathrm{Z})$$

1.9 Τριγωνομετρικοί αριθμοί χαρακτηριστικών γωνιών *(σε rad)*

$\eta\mu 0 = 0$	$\sigma\upsilon\nu 0 = 1$	$\varepsilon\phi 0 = 0$	$-$
$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\varepsilon\phi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sigma\phi\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$
$\eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = 1$	$\sigma\phi\frac{\pi}{4} = 1$
$\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\sigma\phi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$	$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$	$-$	$\sigma\phi\frac{\pi}{2} = 0$

$$\eta\mu\frac{\pi}{12} = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} = \eta\mu\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\varepsilon\phi\frac{\pi}{12} = \sigma\phi\frac{5\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$

$$\sigma\phi\frac{\pi}{12} = \varepsilon\phi\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$$

1.10 Αν $\alpha,\beta,\gamma \in R - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2} / \kappa \in Z\right\}$, τότε ισχύει:

$$\left(\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta + \varepsilon\phi\gamma = \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta\varepsilon\phi\gamma\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \quad \lambda \in Z \\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon: \\ \alpha+\beta+\gamma = \lambda\pi \end{pmatrix}$$

1.11 Αν $\alpha,\beta,\gamma \in R - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2} / \kappa \in Z\right\}$, τότε ισχύει:

$$\left(\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta + \varepsilon\phi\beta\varepsilon\phi\gamma + \varepsilon\phi\gamma\varepsilon\phi\alpha = 1\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \quad \lambda \in Z \\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon: \\ \alpha+\beta+\gamma = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

1.12 Αν $\alpha,\beta \in R$ και θ τυχαία γωνία τότε ισχύει:

$$|\alpha\eta\mu\theta+\beta\sigma\upsilon\nu\theta|\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

2. ΟΔΗΓΙΕΣ

- Αν δίνεται ότι ισχύει $x^2+y^2=\rho^2,\quad(\rho>0)$, τότε υπάρχει $\theta\in[0,2\pi)$, ώστε να ισχύει:

$$x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta\quad\kappa\alpha\iota\quad y=\rho\eta\mu\theta$$

- Αν δίνεται ότι $|x|\le 1$, τότε υπάρχει $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ώστε $x=\eta\mu\theta$

(ομοίως υπάρχει $\phi\in[0,\pi]$, ώστε $x=\sigma\upsilon\nu\phi$)

- Αν δίνεται ότι $|x|\le\alpha,\quad(\alpha>0)$, τότε υπάρχει $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ώστε να

ισχύει: $x=\alpha\eta\mu\theta$

(ομοίως υπάρχει $\phi\in[0,\pi]$, ώστε $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\phi$)

- Αν εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{x^2-1}$, τότε είναι:

$$|x|\ge 1\Leftrightarrow 0<\frac{1}{|x|}\le 1$$

οπότε υπάρχει $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, ώστε: $\frac{1}{|x|}=\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow|x|=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

- Αν εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{1-x^2}$, τότε θέτουμε $x=\eta\mu\theta,\quad\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(ή αντίστοιχα: $x=\sigma\upsilon\nu\theta,\quad\theta\in[0,\pi]$)

- Αν εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{x^2-\alpha^2},\quad(\alpha>0)$, τότε πρέπει να είναι:

$$x^2-\alpha^2\ge 0\Leftrightarrow|x|\ge\alpha\Leftrightarrow 0<\frac{1}{|x|}\le\alpha$$

οπότε θέτουμε $\frac{1}{|x|}=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

- Αν εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{\alpha^2-x^2},\quad(\alpha>0)$, τότε θέτουμε $x=\alpha\eta\mu\theta,\quad\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(ή αντίστοιχα: $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta,\quad\theta\in[0,\pi]$)

- Αν εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{\alpha^2+x^2},\quad(\alpha>0)$, τότε θέτουμε $x=\alpha\varepsilon\phi\theta,\quad\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

- Αν δίνεται ότι ισχύει $xy+yz+zx=1$, τότε θέτουμε $x=\sigma\phi\alpha,\quad y=\sigma\phi\beta,\quad z=\sigma\phi\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$ και έχουμε:

$$\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta+\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma+\sigma\phi\gamma\sigma\phi\alpha=1$$

οπότε υπάρχει $\kappa \in \mathrm{Z}$ ώστε $\alpha+\beta+\gamma=\kappa\pi$ και επειδή $0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$ θα έχουμε ότι $\kappa=1\; ή\; \kappa=2$ δηλαδή:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \; ή \; \alpha+\beta+\gamma=2\pi\,.$$

Ειδικότερα, αν $x,y,z>0$, τότε $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και είναι $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, δηλαδή τα α,β,γ είναι γωνίες τριγώνου.

- Αν δίνεται ότι ισχύει $x+y+z=xyz$, τότε θέτουμε:

$$x=\varepsilon\varphi\alpha,\; y=\varepsilon\varphi\beta,\; z=\varepsilon\varphi\gamma,\quad \left(\alpha,\beta,\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

και έχουμε:

$$\begin{gathered} x+y+z=xyz \Leftrightarrow \\ \varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\; \kappa\in\mathrm{Z}\; \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon: \\ \quad \alpha+\beta+\gamma=\kappa\pi \end{cases} \end{gathered}$$

και επειδή: $-\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$, θα είναι $\kappa=-1\; ή\; \kappa=0\; ή\; \kappa=1$, δηλαδή:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\pi \; ή \; 0 \; ή \; \pi$$

Αν είναι $x,y,z>0$ τότε $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και θα είναι $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, δηλαδή τα α,β,γ θα είναι γωνίες τριγώνου.

3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.1 Να δειχθεί ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει:

$$-\frac{1}{2}\le\frac{(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)}{\left(1+\alpha^2\right)\left(1+\beta^2\right)}\le\frac{1}{2}$$

Λύση

Επειδή $\alpha,\beta\in R$, υπάρχουν $\theta,\phi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ώστε:

$$\alpha=\varepsilon\phi\theta,\; \beta=\varepsilon\phi\phi$$

Έχουμε:

$$\frac{(\varepsilon\phi\theta+\varepsilon\phi\phi)(1-\varepsilon\phi\theta\varepsilon\phi\phi)}{\left(1+\varepsilon\phi^2\theta\right)\left(1+\varepsilon\phi^{\phi 2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi}\right)\left(1-\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi}\right)}{\left(1+\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)\left(1+\frac{\eta\mu^2\phi}{\sigma\upsilon\nu^2\phi}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi+\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi}\right)\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi-\eta\mu\theta\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\phi}\right)}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2\phi+\eta\mu^2\phi}{\sigma\upsilon\nu^2\phi}}=$$

$$=\eta\mu(\theta+\phi)\cdot\sigma\upsilon\nu(\theta+\phi)=\frac{1}{2}\eta\mu\left[2(\theta+\phi)\right].$$

Έτσι έχουμε:

$$\left|\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\alpha\beta)}{\left(1+\alpha^2\right)\left(1+\beta^2\right)}\right|=\frac{1}{2}\left|\eta\mu\left[2(\theta+\phi)\right]\right|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\leq\frac{(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)}{\left(1+\alpha^2\right)\left(1+\beta^2\right)}\leq\frac{1}{2}$$

3.2 Αν $x\in(-1,1)$ να δειχθεί ότι:

$$\left(1+x\right)^n+\left(1-x\right)^n<2^n,\quad \forall n\in N^*, n\geq 2$$

Λύση:

Επειδή $x\in(-1,1)$, υπάρχει $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $x=\cos(2\theta)$.

Έχουμε:

$$(1+x)^n+(1-x)^n=$$

$$=\left(1+\sigma\upsilon\nu(2\theta)\right)^n+\left(1-\sigma\upsilon\nu(2\theta)\right)^n=$$

$$=\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)^n+\left(2\eta\mu^2\theta\right)^n=$$

$$=2^n\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)^n+2^n\left(\eta\mu^2\theta\right)^n<2^n\sigma\upsilon\nu^2\theta+2^n\eta\mu^2\theta=$$

$$(\alpha\phi o\acute{\upsilon}\quad 0<\sigma\upsilon\nu\theta<1\quad \kappa\alpha\iota\quad 0<\eta\mu\theta<1)$$

$$=2^n(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)=2^n\cdot 1=2^n$$

3.3 Αν $x,y>0$ και $x+y=1$ να δειχθεί ότι:

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{17}{2}$$

Λύση

Είναι:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2=x+y=1$$

και $\sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$, οπότε υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta, y = \eta\mu\theta.$$

Έχουμε:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^4\theta + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4\theta} + \frac{1}{\eta\mu^4\theta} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^4\theta + \frac{\eta\mu^4\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta}{\sigma\upsilon\nu^4\theta \cdot \eta\mu^4\theta} =$$

$$= \left(\sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^4\theta\right)\left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4\theta \cdot \eta\mu^4\theta}\right) =$$

$$= \left[\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta\right)^2 - 2\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta\right]\left[1 + \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\eta\mu(2\theta)\right]^4}\right] =$$

$$= \left[1^2 - \frac{1}{2}\eta\mu^2(2\theta)\right]\left[1 + \frac{16}{\eta\mu^4(2\theta)}\right] \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right)\left(1 + \frac{16}{1^4}\right) = \frac{17}{2}$$

3.4 Να δειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in R$ με $|\alpha| \geq 1$ ισχύει

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} + \sqrt{3} \leq 2|\alpha|$$

Λύση

Είναι:

$$|\alpha| \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{|\alpha|} \leq 1$$

οπότε υπάρχει: $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε:

$$\frac{1}{|\alpha|} = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Είναι:

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} + \sqrt{3} \leq 2|\alpha|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}-1}+\sqrt{3}\le 2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\sqrt{3}\le\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta\le 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\eta\mu\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\theta\le 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\eta\mu\frac{\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\le 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$$

η οποία ισχύει.

3.5 Αν $\alpha,\beta\in[-1,1]$ να δειχθεί ότι:

$$\left|\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{3}\left(\alpha\beta-\sqrt{\left(1-\alpha^2\right)\left(1-\beta^2\right)}\right)\right|\le 2$$

Λύση

Επειδή $\alpha,\beta\in[-1,1]$, υπάρχουν $\phi,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ώστε $\alpha=\eta\mu\phi,\ \beta=\eta\mu\theta$.

Έχουμε:

$$\left|\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{3}\left(\alpha\beta-\sqrt{\left(1-\alpha^2\right)\left(1-\beta^2\right)}\right)\right|\le 2$$

$$\Leftrightarrow\left|\eta\mu\phi\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}+\eta\mu\theta\sqrt{1-\eta\mu^2\phi}+\sqrt{3}\left(\eta\mu\phi\eta\mu\theta-\sqrt{\left(1-\eta\mu^2\phi\right)\left(1-\eta\mu^2\theta\right)}\right)\right|\le 2$$

$$\Leftrightarrow\left|\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi+\sqrt{3}\left(\eta\mu\phi\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\phi\sigma\upsilon\nu\theta\right)\right|\le 2$$

$$\Leftrightarrow\left|\eta\mu(\phi+\theta)-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(\phi+\theta)\right|\le 2$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{1}{2}\eta\mu(\phi+\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu(\phi+\theta)\right|\le 1$$

$$\Leftrightarrow\left|\eta\mu(\phi+\theta)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu(\phi+\theta)\eta\mu\frac{\pi}{3}\right|\le 1$$

$$\Leftrightarrow\left|\eta\mu\left(\phi+\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right|\le 1,\quad \textit{το οποίο ισχύει.}$$

3.6 Να δειχθεί ότι για κάθε $x,y,\omega\in R$ ισχύει:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \le \frac{|y-\omega|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+\omega^2}} + \frac{|\omega-x|}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+x^2}}$$

Λύση

Επειδή $x, y, \omega \in R$, υπάρχουν $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έτσι ώστε:

$$x = \varepsilon\phi\theta_1 \text{, } y = \varepsilon\phi\theta_2 \text{, } \omega = \varepsilon\phi\theta_3$$

Είναι:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} = \frac{|\varepsilon\phi\theta_1 - \varepsilon\phi\theta_2|}{\sqrt{1+\varepsilon\phi^2\theta_1}\sqrt{1+\varepsilon\phi^2\theta_2}} = ... = |\eta\mu(\theta_1-\theta_2|$$

Όμοια:

$$\frac{|y-\omega|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+\omega^2}} = |\eta\mu(\theta_2-\theta_3|$$

$$\frac{|\omega-x|}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+x^2}} = |\eta\mu(\theta_3-\theta_1|$$

Θέτουμε:

$$\alpha = \theta_1-\theta_2, \quad \beta = \theta_2-\theta_3, \quad \gamma = \theta_3-\theta_1$$

Είναι:

$$\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -(\beta+\gamma)$$

Επομένως θα είναι:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} = |\eta\mu(\theta_1-\theta_2| = |\eta\mu\alpha| = \left|\eta\mu\left[-(\beta+\gamma)\right]\right| =$$

$$= |-\eta\mu(\beta+\gamma)| = |\eta\mu(\beta+\gamma)| =$$

$$= |\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\beta| =$$

$$= |\eta\mu\beta||\sigma\upsilon\nu\gamma| + |\eta\mu\gamma||\sigma\upsilon\nu\beta| \le$$

$$\le |\eta\mu\beta|\cdot 1 + |\eta\mu\gamma|\cdot 1 =$$

$$= |\eta\mu\beta| + |\eta\mu\gamma| =$$

$$= |\eta\mu(\theta_2-\theta_3)| + |\eta\mu(\theta_3-\theta_1)| =$$

$$= \frac{|y-\omega|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+\omega^2}} + \frac{|\omega-x|}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+x^2}}$$

Άρα ισχύει:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \le \frac{|y-\omega|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+\omega^2}} + \frac{|\omega-x|}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+x^2}}$$

3.7 Να λυθεί η εξίσωση:

$$8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=0 \quad (1)$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1 \quad (1)$$

Αν $x \geq 1$ τότε $f(x)>1$

Αν $x \leq -1$ τότε $f(x)<0$

Έτσι για κάθε $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ είναι $f(x) \neq 1$. Επομένως οι λύσεις της (1) θα αναζητηθούν στο διάστημα $(-1,1)$.

Για κάθε $x \in (-1,1)$, υπάρχει $\theta \in (0,\pi)$ ώστε $x=\sigma\upsilon\nu\theta$. Έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 8\sigma\upsilon\nu\theta\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1\right)\left(8\sigma\upsilon\nu^4\theta-8\sigma\upsilon\nu^2\theta+1\right)=1\\
&\Leftrightarrow 8\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu(2\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(4\theta)=1\\
&\overset{\eta\mu\theta\neq 0}{\Leftrightarrow} 8\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu(2\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(4\theta)=\eta\mu\theta\\
&\Leftrightarrow 4\eta\mu(2\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(4\theta)=\eta\mu\theta\\
&\Leftrightarrow 2\eta\mu(4\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(4\theta)=\eta\mu\theta\\
&\Leftrightarrow \eta\mu(8\theta)=\eta\mu\theta\\
&\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 8\theta=2\kappa\pi+\theta \\ \qquad \acute{\eta} \\ 8\theta=2\lambda\pi+\pi-\theta \end{array}\right. \qquad \kappa,\lambda\in \mathrm{Z}\\
&\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \theta=\dfrac{2\kappa\pi}{7} \\ \qquad \acute{\eta} \\ \theta=\dfrac{(2\lambda\pi+1)\pi}{9} \end{array}\right. \qquad \kappa,\lambda\in \mathrm{Z} \quad \kappa\alpha\iota \quad \mu\varepsilon \quad \theta\in(0,\pi)
\end{aligned}$$

Άρα:

$$x_1=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7},\ x_2=\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7},\ x_3=\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7},\ x_4=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$$

$$x_5=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3},\ x_6=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{9},\ x_7=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{9}$$

είναι οι λύσεις της (1).

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

4.1 Να δειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)}{\left(1+\alpha^2\right)\left(1+\beta^2\right)} \leq \frac{1}{2}$$

4.2 Αν $x \in (-1,1)$ να δειχθεί ότι:

$$(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n, \quad \forall n \in N^*$$

4.3 Αν $x, y > 0$ και $x + y = 1$ να δειχθεί ότι:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{17}{2}$$

4.4 Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in R$ με $|x| \geq 1$ ισχύει

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{3} \leq 2|x|$$

4.5 Αν $x, y \in [-1,1]$ να δειχθεί ότι:

$$\left| x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}\left(xy - \sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right) \right| \leq 2$$

4.6 Να δειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ισχύει:

$$\frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}} \leq \frac{|\beta-\gamma|}{\sqrt{1+\beta^2}\sqrt{1+\gamma^2}} + \frac{|\gamma-\alpha|}{\sqrt{1+\gamma^2}\sqrt{1+\alpha^2}}$$

4.7 Να λυθεί η εξίσωση:

$$8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right) = 0$$

4.8 Αν $\alpha \in R$ και $|\alpha| \geq 1$ τότε να δείξετε ότι:

$$-2 \leq \frac{\sqrt{\alpha^2-1}+\sqrt{3}}{\alpha} \leq 2$$

4.9 Να λυθεί η εξίσωση:

$$32x\left(x^2-1\right)\left(2x^2-1\right)^2 = 1 - \frac{1}{x}$$

4.10 Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$$

4.11 Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right) \\ xy+y\omega+\omega x=1 \end{cases}$$

4.12 Να δειχθεί ότι για κάθε $x,y\in R$ ισχύει:

$$-\frac{1}{4}\le\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(1-x^2y^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2\left(1+y^2\right)^2}\le\frac{1}{4}$$

4.13 Αν $x,y\in[-1,1]$ και ισχύει:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}-xy$$

τότε να εκφραστεί το y συναρτήσει του x.

4.14 Να λυθεί η εξίσωση:

$$8x^3-6x=\sqrt{2(x+1)}$$

4.15 Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$f(x,y)=xy-\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)},\quad x,y\in[-1,1]$$

4.16 Αν $x\cdot y\ge 1$, τότε να δειχθεί ότι:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}$$

4.17 Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^3-3x+1=0$$

4.18 Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1-x^2}=y \\ \dfrac{2y}{1-y^2}=x \end{cases}$$

Βιβλιογραφία

1. Διαγωνισμοί Βιετνάμ.(Διαδικτυακός χώρος)
2. Περιοδικό «Ευκλείδης» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.